

EXERCICES — CHAPITRE 9

Solution 1 –

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ donc A est majoré par 1 et minoré par 0.
- On a $1 = \frac{1}{1} \in A$ donc 1 est le plus grand élément de A . Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ donc A n'admet pas de plus petit élément.
- A admet un plus grand élément donc il admet une borne supérieure, égale à 1. A admet un minorant donc il admet une borne inférieure. Montrons que cette borne inférieure est égale à 0. Soit $\alpha > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < \alpha$. Autrement dit, α n'est pas un minorant de A . Ainsi, 0 est le plus grand minorant de A donc il s'agit bien de sa borne inférieure.
- On considère maintenant $A \setminus \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ tel que } m < 2n \right\}$. Soit $x \in A$. Il existe $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $m < 2n$, tel que $x = \frac{m}{n}$. Alors, on a $0 < x < 2$ donc A est majoré par 2 et minoré par 0.
Pour les mêmes raisons que l'ensemble A précédent, A ne possède pas de plus petit élément mais admet 0 comme borne inférieure.
Enfin, A n'admet pas de plus grand élément mais admet 2 comme borne supérieure.

Solution 2 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 2 \geq n^2 + 1 \geq 0$. Donc

$$\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \geq 0.$$

Donc 0 est un minorant de E .

Méthode 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{n^2 + n + 2 - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \end{aligned}$$

En factorisant par n au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

Comme $n \geq 1$, on a $1 + \frac{1}{n} \leq 2$.

De plus, comme ce sont des racines de nombres supérieurs à 1, on a

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \geq 2$$

Ainsi, $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \leq \frac{2}{2} = 1$, et E est donc majoré par 1.

Comme E est majoré et minoré, E est borné.

Méthode 2 :

On pose $f: \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 1} \end{matrix}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^3+\frac{5}{4}x^2+x+\frac{1}{4}} - \sqrt{x^4+x^3+2x^2}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+x+2}}.$$

$$\sqrt{x^4+x^3+\frac{5}{4}x^2+x+\frac{1}{4}} - \sqrt{x^4+x^3+2x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4+x^3+\frac{5}{4}x^2+x+\frac{1}{4}} \geq \sqrt{x^4+x^3+2x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4+x^3+\frac{5}{4}x^2+x+\frac{1}{4} \geq x^4+x^3+2x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{4}x^2+x+\frac{1}{4} \geq 0$$

Le discriminant de $\frac{-3}{4}x^2+x+\frac{1}{4}$ est $\Delta = \frac{7}{4}$ et ses racines sont

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{7/4}}{-3/2} \approx 1.5 \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{7/4}}{-3/2} \approx -0.2.$$

Donc f' est négative sur $[2; +\infty[$, donc f est décroissante sur $[2; +\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 2$.

$$f(0) = \sqrt{2} - \sqrt{1} \leq 1$$

$$f(1) = 2 - \sqrt{2} \leq 1$$

$$f(2) = 2\sqrt{2} - \sqrt{5} \leq 1$$

Donc E est majoré par 1.

Solution 3 – A - Soit $n \geq 1$. Lorsque n est pair, $\frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} + 1$.

Soit les termes $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \dots$

Lorsque n est impair, $\frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} - 1$.

Soit les termes $0, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{5}, \frac{-6}{7}, \dots$

L'ensemble des majorants est $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$,

l'ensemble des minorants est $] -\infty, -1]$.

$\max(A) = \frac{3}{2}$, mais A n'a pas de plus petit élément.

$\sup(A) = \frac{3}{2}$, $\inf(A) = -1$.

B - On pose $f : \begin{matrix}]3;6[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} \end{matrix}$. Alors f est dérivable sur $]3;6[$ et pour tout $x \in]3;6[$,

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2 - 3x + 6)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

De plus, $\lim_3 f = 6$, $f(4) = 5$ et $\lim_6 f = 6$.

x	3	4	6
$f'(x)$	-	0	+
f	6	5	6

L'ensemble des majorants est $[6; +\infty[$,

l'ensemble des minorants est $] -\infty, 5]$.

$\min(B) = 5$, mais B n'a pas de plus grand élément.

$\sup(B) = 6$, $\inf(B) = 5$.

C - On sait que tout nombre réel peut être approché aussi proche que l'on souhaite, par excès ou par défaut, par une suite de nombre décimaux, donc rationnels. Donc, il existe de C aussi proche que l'on souhaite de $\sqrt{3}$ et d'autres aussi proche que l'on souhaite de $\sqrt{2}$.

L'ensemble des majorants est $[\sqrt{3}; +\infty[$, l'ensemble des minorants est $] -\infty, \sqrt{2}]$.

C n'a pas de plus grand élément ni de plus petit élément.

$\sup(C) = \sqrt{3}$, $\inf(C) = \sqrt{2}$.

D - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit x , soit $\frac{1}{x}$ est plus grand que 1 et l'autre est dans $[0, 1]$. On en déduit que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1$.

Or pour $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, on a que $\frac{1}{x} \in]1, 2[$ et donc $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

On en déduit que 1 est le plus petit élément (et donc la borne supérieure) de D .

De plus, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la borne supérieure de D est $+\infty$ et il n'y a pas de plus grand élément.

Solution 4 –

1. A est donc majorée par α et toute partie non-vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A et α est un majorant de A , donc $\sup(A) \leq \alpha$.
Si $\forall x \in A, x < \alpha$, on ne peut pas en déduire que $\sup(A) < \alpha$. Exemple :

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \alpha = 1.$$

On a bien, pour tout $x \in A$, $x < 1$. Cependant, $\sup(A) = 1$.

2. Soit M un majorant de B . Pour tout $x \in A$, $x \in B$, donc $x \leq M$. Donc M est aussi un majorant de A .
Tout majorant de B est donc un majorant de A , donc $\sup(B)$ est aussi un majorant de A .
Comme $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A , on a $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Solution 5 – A et B sont non-vides, donc on peut prendre $a \in A$, $b \in B$.

Pour tout $x \in A$, $x \leq b$, donc b est un majorant de A . Donc A est non-vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure α .

De même, pour tout $y \in B$, $a \leq y$, donc a minore B , donc B (non-vide) admet une borne inférieure β .

Montrons par l'absurde que $\alpha \leq \beta$. Supposons que $\beta < \alpha$. Alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $\beta < z < \alpha$.

β est le plus grand minorant de B et $z > \beta$, donc il existe $y \in B$ tel que $\beta \leq y < z$.

De même, α est le plus petit majorant de A et $\alpha > z$, donc il existe $x \in A$ tel que $z < x \leq \alpha$. On a donc $\beta \leq y < z < x \leq \alpha$ et donc en particulier, $y < x$, ce qui contredit l'hypothèse $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$. Donc $\alpha \leq \beta$.

Solution 6 – Notons $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$. Soit $(x, y) \in A^2$. On a $m \leq x \leq M, m \leq y \leq M$, donc $m - M \leq x - y \leq M - m$, soit

$$|x - y| \leq M - m.$$

On déduit de cette inégalité que B est non vide (car $A \neq \emptyset$) et bornée par $M - m$, donc elle admet une borne supérieure finie. Avec l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sup(B) \leq M - m$$

Soit M_1 un majorant de B . Pour tout $(x, y) \in A^2$, $x - y \leq |x - y| \leq M_1$, d'où $x \leq M_1 + y$ ce qui signifie que $M_1 + y$ majore A . Ainsi,

$$\forall y \in A, M \leq M_1 + y \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall y \in A, M - M_1 \leq y$$

ce qui signifie que $M - M_1$ minore A . Ainsi $M - M_1 \leq m$, puis $M - m \leq M_1$. Donc $M - m$ est bien le plus petit des majorants de B , d'où $\sup(B) = M - m$.

Solution 7 –

1. Soit α un majorant de A et β un majorant de B . Alors $\max(\alpha, \beta)$ est un majorant de $A \cup B$. De plus $A \cup B$ est non-vide (car A non-vide), donc elle admet une borne supérieure.

Nous allons montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

$A \subset A \cup B$, donc par l'exercice 4, $\sup(A) \leq \sup(A \cup B)$. De même, $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$.

Donc $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup(A), \sup(B))$. Raisonnons par l'absurde pour montrer qu'il s'agit en fait d'une égalité.

Supposons que $\sup(A \cup B) > \max(\sup(A), \sup(B))$.

Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $\sup(A \cup B) > x > \max(\sup(A), \sup(B))$ (par caractérisation de la borne supérieure). Or, $x > \sup(A)$, donc $x \notin A$. De même, $x \notin B$. Donc $x \notin A \cup B$. Ceci est absurde, donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.

Finalement, on a bien $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

2. $A \cap B \subset A \cup B$, donc $A \cap B$ est majorée par $\max(\alpha, \beta)$. Si de plus elle est non-vide, alors elle admet une borne supérieure. On ne peut pas toujours l'exprimer en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$. Exemple :

Soient $a, b \in]1; +\infty[$.

$$A = \{0\} \cup \left\{ a - \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad B = \{0\} \cup \left\{ b - \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Alors, $\sup(A) = a, \sup(B) = b$, mais $A \cap B = \{0\}$, donc $\sup(A \cap B) = 0$.

Solution 8 –

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$x = E(x) + r \text{ avec } r \in [0, 1[.$$

$$y = E(y) + q \text{ avec } q \in [0, 1[.$$

Alors $x + y = E(x) + r + E(y) + q$. Donc $x + y \geq E(x) + E(y)$. Par croissance de E , on a $E(x + y) \geq E(E(x) + E(y)) = E(x) + E(y)$ car $E(x) + E(y) \in \mathbb{N}$. Donc

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y).$$

$E(x + y) = E(E(x) + r + E(y) + q)$. Or, $r + q \in [0, 2[$, donc $E(E(x) + r + E(y) + q) = E(x) + E(y)$ si $r + q < 1$ et $E(E(x) + r + E(y) + q) = E(x) + E(y) + 1$ si $r + q \in [1, 2[$. D'où

$$E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x = E(x) + r$ avec $r \in [0, 1[$,

▷ Si n est pair, alors

$$\frac{x}{2} = \frac{n}{2} + \frac{r}{2}, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{r+1}{2}$$

Comme n est pair, $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$. De plus, $\frac{r}{2} \in [0, 1[$, $\frac{r+1}{2} \in [0, 1[$, donc $E(\frac{x}{2}) = \frac{n}{2}$ et $E(\frac{x+1}{2}) = \frac{n}{2}$, et donc :

$$E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n = E(x).$$

▷ Si n est impair, alors

$$\frac{x}{2} = \frac{n-1}{2} + \frac{r+1}{2}, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{n+1}{2} + \frac{r}{2}$$

Comme n est impair, $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$ et $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$. De plus, $\frac{r+1}{2} \in [0, 1[$, $\frac{r}{2} \in [0, 1[$, donc $E(\frac{x}{2}) = \frac{n-1}{2}$ et $E(\frac{x+1}{2}) = \frac{n+1}{2}$, et donc :

$$E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = n = E(x).$$

Dans tous les cas,

$$E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x).$$

Solution 9 –

1. $f(0) \in [0, 1]$, donc $f(0) \geq 0$, ce qui signifie que $0 \in A$. Comme A est non-vide, A admet bien une borne supérieure a .

$0 \in A$ et a est un majorant de A , donc $0 \leq a$.

1 majore A et a est le plus petit majorant de A , donc $a \leq 1$.

2. Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. on a donc $f(x) \geq x$, c'est-à-dire $y \geq x$. Comme f est croissante, on en déduit que

$$f(y) \geq f(x) = y$$

Donc $y \in A$. Ainsi $f(A) \subset A$.

3. Soit $x \in A$. On a donc que $x \leq a$. Comme f est croissante, cela implique que $f(x) \leq f(a)$. Comme $x \in A$, on a que $f(x) \geq x$. Finalement, on a que

$$\forall x \in A, x \leq f(a)$$

Donc $f(a)$ majore A .

4. La question précédente montre que $a \leq f(a)$, donc $a \in A$. a est donc le plus grand élément de A . D'après la question 2, $f(a) \in A$. Or, $f(a) \geq a$ (vu que $a \in A$). Comme a est le plus grand élément de A , on en déduit que $f(a) = a$.

Quelques vidéos pour se cultiver:

Sur les écritures décimales des réels :

 [Comment écrire les nombres ayant une infinité de décimales ? - - Science Etonnante](#) 

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!