

EXERCICES — CHAPITRE 8

Exercice 1 (♣) – Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ , en faisant disparaître ce symbole.

$$1. T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2} \quad \left| \quad 2. T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1} \right.$$

Exercice 2 (♣) – Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12} & 4. S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50 \\ 2. S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024} & 5. S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 13^2 + 14^2 \\ 3. S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^n}{n} & 6. S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 \end{array}$$

Exercice 3 (♥) – Pour n dans $\mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. S_n = \sum_{k=0}^n (8k+2) & 5. S_n = \sum_{k=0}^n (2^k + 3^{2k}) \\ 2. S_n = \sum_{k=0}^n (4k^2 - 4k - 2) & 6. S_n = \sum_{k=n}^{2n+1} 7 \\ 3. S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{5^{k+1}} & 7. S_n = \sum_{i=3}^{50} (8i+6) \\ 4. S_n = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{3^{2k+1}}{2^k} & 8. S_n = \sum_{k=n}^{2n} k^2 \end{array}$$

Exercice 4 (♥) – Calculer les sommes (utiliser le résultat de l'exercice 5 pour S_3) :

$$S_1 = \sum_{k=8}^{21} \frac{2k-5}{6}; \quad S_2 = \sum_{k=0}^{23} \binom{23}{k} (-1)^k 2^{23-k}; \quad S_3 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3.$$

Exercice 5 (♥) – Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 6 (♥) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$S_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1)2 + n.$$

Exercice 7 (♠) – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n et I_n les sommes suivantes

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$ en fonction de n .
- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n et I_n en fonction de n .

Exercice 8 (♥) –

- Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln(k)$.
 - En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\ln(n)$.
- Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}$.
 - En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$.
- Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) - \ln(k) + \ln(k+1) - \ln(k)$.
 - En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2)$.

Exercice 9 (♥) – Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 10 (♥) – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 11 (♥) – Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

et en déduire la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 (♠) – Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 13 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$$

où $\min(k, n)$ désigne le plus petit des deux entiers k et n et la somme

$$T_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2.$$

Exercice 14 (♠) – Soit m un entier naturel. Démontrer, pour tout entier $n \geq m$, l'égalité :

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Exercice 15 (♥) – Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 & S_2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \\ S_3 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} & S_4 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2^{i+j} \end{aligned}$$

Exercice 16 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$.
3. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

4. Déterminer alors la valeur de $T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

Exercice 17 (♣) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_1 = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{k+1}$ et $P_2 = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 18 (♥♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression sans le symbole $\prod$ mais avec des factorielles de $\prod_{k=1}^n (2k+1)$.

Exercice 19 (♥) –

1. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ n éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k).$$

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right) = \prod_{k=1}^n e^{\alpha_k}.$$

3. Application : donner une expression en fonction de n de $R_n = \prod_{k=1}^n e^k$ et de $S_n = \sum_{k=2}^n \ln(k)$.

Exercice 20 (♥) – Pour tout $n \geq 2$, on considère le produit

$$P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

1. Démontrer que $\forall n \geq 2, P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$.
2. En déduire une expression simplifiée de P_n .

Exercice 21 (♣) – Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer des expressions simplifiées pour :

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}.$$

Exercice 22 (♠) – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7 en utilisant une factorisation.

Exercice 23 (♥) – Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(ka + (n-k)b).$$

Exercice 24 (♥) – Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

1. Recalculer $S_1(t) = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $S_2(t) = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. En déduire $S_3(t) = \sum_{k=0}^n k \sin(kt)$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $S_4(t) = \sum_{k=0}^n \cos^4(kt)$. Exprimer S_4 en fonction de S_1 .

Exercice 25 (♦) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

Exercice 26 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n .
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n .

Exercice 27 (♥) – Calculer $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!