EXERCICES — CHAPITRE 8

Solution 1 – Il suffit de développer les sommes en écrivant chacun des termes pour les valeurs de k correspondantes.

1. On somme ici les nombres de la forme $\frac{1}{k^2}$, pour k allant de 3 jusqu'à 10.

$$T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}$$

2. On somme ici les nombres de la forme $\frac{1}{2k+1}$, pour k allant de 1 jusqu'à 10. Il s'agit en réalité des inverses des 10 premiers nombres impairs.

$$T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2\times 1+1} + \cdots + \frac{1}{2\times 10+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21}.$$

Solution 2 –

1. Les termes de la somme sont les puissances de 2, de 2^3 à 2^{12}. Ainsi

$$S_1 = \sum_{k=3}^{12} 2^k.$$

2. Les termes de la somme sont de la forme $\frac{k}{2^k}$, pour k allant de 1 à 10. Ainsi

$$S_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2^k}.$$

3. Les termes de la somme sont de la forme $\frac{a^k}{k}$, pour k allant de 1 à n. Ainsi

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k}.$$

4. Les termes de la somme sont les nombres pairs de 2 à 50, *i.e.* les $2k$, pour k allant de 1 à 25. Aussi les termes sont alternés, il faut donc ajouter un facteur alternant entre 1 et -1. On sait que

$$(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad (-1)^{k+1} = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

J'utilise donc $(-1)^{k+1}$ pour que le signe coïncide avec la valeur, et alors

$$S_4 = \sum_{k=1}^{25} (-1)^{k+1} \times 2k.$$

5. Les termes de la somme sont les premiers carrés, de 1^2 jusqu'à 14^2. Ainsi

$$S_5 = \sum_{k=1}^{14} k^2.$$

6. On remarque tout d'abord que $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$ et $125 = 5^3$. Les termes de la somme sont les premiers cubes, de $1^3 = 1$ jusqu'à $5^3 = 125$. Ainsi

$$S_6 = \sum_{k=1}^{5} k^3.$$

Solution 3 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} (8k+2) \\ &= 8\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 2 && \text{par linéarité de la somme} \\ &= 8\frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) \\ &= 4n(n+1) + 2(n+1) \\ &= (4n+2)(n+1) \\ &= 2(2n+1)(n+1) \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} (4k^2 - 4k - 2) \\
&= 4\sum_{k=0}^{n} k^2 - 4\sum_{k=0}^{n} k - 4\sum_{k=0}^{n} 2 && \text{par linéarité de la somme} \\
&= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) - 2(n+1) \\
&= (n+1)\left(\frac{2}{3}n(2n+1) - 2n - 2\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{4}{3}n^2 - \frac{4}{3}n - 2\right)
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{5^{k+1}} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{5}\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} \\
&= \frac{1}{5}\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{3^{2k+1}}{2^k} \\
&= 3\sum_{k=3}^{n+2} \frac{(3^2)^k}{2^k} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= 3\sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{9}{2}\right)^k \\
&= 3 \times \left(\frac{9}{2}\right)^3 \times \frac{1 - \left(\frac{9}{2}\right)^n}{1 - \frac{9}{2}} \\
&= 3 \times \frac{729}{8}\frac{1 - \left(\frac{9}{2}\right)^n}{-\frac{7}{2}} \\
&= \frac{2187}{28}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} (2^k + 3^{2k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} (3^2)^k \\
&= \left(2^{n+1} - 1\right) + \frac{9^{n+1} - 1}{8} \\
&= \frac{9^{n+1} + 8 \times 2^{n+1} - 9}{8}
\end{aligned}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n+1} 7 = 7(n+2)$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= 8\sum_{i=3}^{50} i + 6\sum_{i=3}^{50} 1 \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= 8 \times \frac{(50-3+1)(3+50)}{2} + 6(50-3+1)\\
&= 8 \times \frac{48 \times 53}{2} + 6 \times 48\\
&= 48(4 \times 53 + 6)\\
&= 48(212+6)\\
&= 48 \times 218\\
&= 10464
\end{aligned}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{2n} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\\
&= \frac{2n(2n+1)(2(2n)+1)}{6} - \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}\\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)-(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= n \times \frac{2(2n+1)(4n+1)-(n-1)(2n-1)}{6}\\
&= \frac{n(14n^2+15n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Solution 4 –

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{6}\sum_{k=8}^{21}(2k-5)\\
&= \frac{1}{6}\left(2\sum_{k=8}^{21} k - \sum_{k=8}^{21} 5\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(2\sum_{k=8}^{21} k - 14 \times 5\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(2\left(\sum_{k=1}^{21} k - \sum_{k=1}^{7} k\right) - 14 \times 5\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{6}\left(2\left(\frac{21 \times 22}{2} - \frac{7 \times 8}{2}\right) - 14 \times 5\right)\\
&= \frac{1}{6}(462-56-70)\\
&= 56
\end{aligned}$$

Pour S_2, on reconnait une formule du binôme de Newton appliquée à -1 et 2.

$$S_2 = (-1+2)^{23} = 1^{23} = 1.$$

Pour S_3, on commence par développer à l'aide de l'identité remarquable de degré 3.

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{k=1}^{n} 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1\\
&= 8\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) - 12\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 6\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\\
&= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} - n\\
&= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n\\
&= n\left[(n+1)\left(2n(n+1) - 2(2n+1) + 3\right) - 1\right]\\
&= n\left[(n+1)\left(2n^2 - 2n + 1\right) - 1\right]\\
&= n\left[2n^3 - n + 1 - 1\right]\\
&= n^2\left[2n^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

Solution 5 – On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,« $P_n : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ »

Initialisation :

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3, \qquad \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0.$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\
&= (n+1) \times \left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\
&= (n+1) \times \left(\frac{(n+2)^2}{4}\right) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence que P_n est vraie pour tout n entier naturel, donc que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$$

Solution 6 –

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-k^2 + (n+1)k) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^{n} k \\
&= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} (-(2n+1) + 3(n+1)) \\
&= \frac{n(n+1)}{6} (n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$

Solution 7 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Alors :

$$\begin{aligned}
P_n + I_n &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n - I_n &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= (1-1)^n \quad \text{(Binôme de Newton)} \\
&= 0 \quad \text{car } n \neq 0
\end{aligned}$$

2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{l} P_n + I_n = 2^n \\ P_n - I_n = 0 \end{array}$. En additionnant ces deux lignes, on obtient $2P_n = 2^n$ et donc $P_n = 2^{n-1}$.
Avec la deuxième ligne, on a également $I_n = P_n = 2^{n-1}$.
Lorsque $n = 0$, on a $P_0 = 1$ et $I_0 = 0$.

Solution 8 – Dans cet exercice, on se sert des propriétés algébriques du logarithme pour me ramener à une somme télescopique.

1. (a) Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln(k.)$$

(b) On calcule la somme. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k) \\
&= \ln(1) - \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(2)} - \cancel{\ln(3)} + \cancel{\cdots} + \cancel{\ln(n-1)} - \ln(n) \\
&= \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n)
\end{aligned}$$

2. (a) Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} &= \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}\\ &= \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}\\ &= \frac{\ln(k+1)}{\ln(k)\ln(k+1)} - \frac{\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\end{aligned}$$

(b) On calcule la somme. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \cancel{\frac{1}{\ln(3)}} + \cancel{\frac{1}{\ln(3)}} - \cancel{\frac{1}{\ln(4)}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{\ln(n)}} - \frac{1}{\ln(n+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\ &= \ln\left(k^2-1\right) - \ln\left(k^2\right)\\ &= \ln\left((k-1)(k+1)\right) - \ln\left(k\times k\right)\\ &= \ln(k-1)+\ln(k+1)-\ln(k)-\ln(k)\\ &= \ln(k-1)-\ln(k)+\ln(k+1)-\ln(k)\end{aligned}$$

(b) Afin de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, on la sépare en deux sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1)-\ln(k)+\ln(k+1)-\ln(k)\right)\\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)-\ln(k)\right) + \left(\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\ln(k)\right)\end{aligned}$$

J'étudie ensuite chacune de ces deux sommes télescopiques séparément.
D'une part,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)-\ln(k) &= \ln(1) - \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(2)} - \cancel{\ln(3)} + \cancel{\cdots} + \cancel{\ln(n-1)} - \ln(n)\\ &= \ln(1)-\ln(n) = -\ln(n)\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) &= \cancel{\ln(3)} - \ln(2) + \cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)} + \cancel{\cdots} + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}\\ &= \ln(n+1)-\ln(2)\end{aligned}$$

En regroupant ces deux sommes, j'obtiens que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(n)+\ln(n+1)-\ln(2) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(2).$$

Solution 9 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1)-\ln(k))\\ &= \ln(n+1)-\ln(1)\\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

par somme télescopique.

Solution 10 – On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$ ».

Initialisation : $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = 1\cdot 1! = 1$ et $(1+1)!-1=1$, donc P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vraie.

$$\begin{aligned}(n+2)!-1 &= (n+2)\times(n+1)!-1\\ &= ((n+1)+1)\times(n+1)!-1\\ &= (n+1)\times(n+1)!+(n+1)!-1\\ &= (n+1)\times(n+1)!+\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k!\end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n :\in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$.

Autre méthode :
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k!\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot k!-k!\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k!\end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme télescopique.
On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$.

Solution 11 – Faire au brouillon une méthode de SI sale, puis :
En posant $a=c=\frac{1}{2}$ et $b=-1$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2} &= \frac{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)-k(k+2)+\frac{1}{2}k(k+1)}{k(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

Donc les valeurs choisies pour a,b,c conviennent. On en déduit que

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1/2}{k+2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k}-\frac{1/2}{k+1}+\frac{1/2}{k+2}-\frac{1/2}{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k}-\frac{1/2}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k+2}-\frac{1/2}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

Ces deux sommes sont télescopiques et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{1+1}=\frac{-n}{2(n+2)}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{-n}{2(n+2)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n(n+2)-n(n+1)}{2(n+2)(n+1)}\right)\\ S_n &= \frac{n(n+3)}{4(n+2)(n+1)}\end{aligned}$$

Solution 12 – On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose P_n : « $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$ ».

Initialisation : $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}=1$. De plus, $2-\frac{1}{1}=1$. Donc P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vraie. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &\leqslant 2-\frac{1}{n}\\ \frac{1}{(n+1)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\\ \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} &\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

On cherche à montrer que $-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant -\frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)} &= -\frac{n+1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n}{n(n+1)}\\ &= \frac{-1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= \frac{-(n+1)+n}{n(n+1)^2}\end{aligned}$$

Donc $-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)}\leqslant 0$, d'où $-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant -\frac{1}{n+1}$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Donc $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$.

Solution 13 – On va scinder la somme en deux sommes :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\min(k,n)+\sum_{k=n+1}^{2n}\min(k,n)$$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\min(k,n)=k$ et pour tout $k\in[\![n+1,2n]\!]$, $\min(k,n)=n$. D'où

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}n\\ &=\frac{n(n+1)}{2}+n^2\\ &=\frac{n(3n+1)}{2}\end{aligned}$$

Pour T_n on distingue les k pairs et impairs.

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{2n}(-1)^k k^2+\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{2n}(-1)^k k^2\\ &=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{2n}k^2-\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{2n}k^2\\ &=\sum_{k=0}^{n}(2k)^2-\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2\\ &=\sum_{k=0}^{n}4k^2-\sum_{k=0}^{n-1}(4k^2+4k+1)\\ &=\sum_{k=0}^{n}4k^2-\sum_{k=0}^{n-1}4k^2-\sum_{k=0}^{n-1}4k-\sum_{k=0}^{n-1}1\\ &=4n^2-4\frac{(n-1)n}{2}-n\end{aligned}$$

On a donc

$$T_n=n(4n-2(n-1)-1)=n(2n+1)$$

Solution 14 – On raisonne par récurrence sur n.

Pour tout n entier supérieur ou égal à m, on pose P_n : « $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$ ».

Initialisation : Pour $n=m$: $\sum_{k=m}^{m}\binom{k}{m}=\binom{m}{m}=1$.

De plus, $\binom{m+1}{m+1}=1$, donc $\sum_{k=m}^{m}\binom{k}{m}=\binom{m+1}{m+1}$ et P_m est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant m$. On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m}+\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}&=\binom{n+1}{m}+\binom{n+1}{m+1}\\ \sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m}&=\binom{n+2}{m+1}\end{aligned}$$

cette dernière égalité étant obtenue grâce à la formule de Pascal.
Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout n entier supérieur ou égal à m, $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$.

Solution 15 –

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2+2ij+j^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2+2i\sum_{j=1}^{n} j+\sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2+2i\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= n\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)+2\frac{(n+1)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= n\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{n^2(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+n+1+\frac{2n+1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, $S_1=\dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$

S_2 est également une « somme sur un rectangle ».

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right)
\end{aligned}$$

Lorsque $j\in[\![1,i]\!]$, on a $\min(i,j)=j$. Si $j\in[\![i+1,n]\!]$, alors $\min(i,j)=i$.

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j+\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+i(n-i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{2n+1}{2}-\frac{i^2}{2}\right)\\
&= \frac{2n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \frac{(2n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On obtient $S_2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
S_3 et S_4 sont des sommes « sur un triangle ».

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)
\end{aligned}$$

D'où $S_3=\dfrac{n^2+3n}{4}$.

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}2^{i+j}\\
&= \sum_{j=2}^{n}2^j\sum_{i=1}^{j-1}2^i
\end{aligned}$$

On reconnait la somme de termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, donc

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{j=2}^{n} 2^j 2 \frac{2^{j-1}-1}{2-1} \\
&= \sum_{j=2}^{n} 2^{2j} - 2^{j+1} \\
&= \sum_{j=2}^{n} 4^j - 2\sum_{j=2}^{n} 2^j \\
&= 16\frac{4^{n-1}-1}{4-1} - 2\times 2^2 \frac{2^{n-1}-1}{2-1} \\
&= \frac{1}{3}(4^{n+1}-16) - 2^{n+2} + 8
\end{aligned}$$

On trouve donc que $S_4 = \dfrac{4^{n+1}}{3} - 2^{n+2} + \dfrac{8}{3}$.

Solution 16 –

1. En utilisant la somme de termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on trouve

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{2^{n-k+1}-1}{2-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (2^{n+1} - 2^k) \\
&= (n+1)2^{n+1} - \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \\
&= n2^{n+1} + 1
\end{aligned}$$

2. Il s'agit ici de procéder à un changement d'écriture de somme double sur un triangle.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{0\leqslant k\leqslant j\leqslant n} 2^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} 2^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j
\end{aligned}$$

3. En utilisant les deux questions précédentes en $n-1$, on obtient que

$$\begin{aligned}
(n-1)2^n + 1 &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^j \\
(n-1)2^n + 1 &= \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} \qquad \text{avec } k = j+1
\end{aligned}$$

4. D'après la question 3,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{i=1}^{n} (i2^{i+1}+1) \\
&= n + \sum_{i=1}^{n} i2^{i+1} \\
&= n + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)2^{i+2} \\
&= n + 4S_{n-1} \qquad \text{d'après la question 2}
\end{aligned}$$

A l'aide de la question 1, on trouve alors

$$T_n = n + 4(n-1)2^n + 4.$$

Solution 17 –

$$\begin{aligned}
P_1 &= \prod_{k=1}^{n} 2\frac{k}{k+1} \\
&= 2^n \times \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}
\end{aligned}$$

On reconnait un produit télescopique. En effet,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$P_1 = \frac{2^n}{n+1}$$

Le premier facteur apparaissant dans P_2 est $1 - \dfrac{1}{1^2} = 0$, donc $P_2 = 0$.

Solution 18 – Avec des pointillés, cela donne :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(2k+1) &= 3\times 5\times 7\times \dots (2n-1)\times(2n+1)\\ &= \frac{3\times 5\times 7\times \dots (2n-1)\times(2n+1)\times 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times 2n}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times 2n}\\ &= \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^{n}2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n+1)!}{2^n(n!)}\end{aligned}$$

On peut procéder de façon plus formelle :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(2k+1) &= \prod_{\substack{k=3\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k\\ &= \frac{\prod_{\substack{k=3\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k\times\prod_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2n} k}{\prod_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2n} k}\\ &= \frac{\prod_{k=2}^{2n+1}k}{\prod_{k=1}^{n}2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n+1)!}{2^n(n!)}\end{aligned}$$

Solution 19 –

1. Cette égalité vient de la propriété fondamentale du logarithme

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

Pour démontrer rigoureusement cette égalité, on procède par récurrence sur n.

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « pour tous $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)$ ».

Initialisation : $(n=1)$ $\ln(a_1)=\ln(a_1)$.
Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 1$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi.
Soient $a_1,\dots,a_{n+1}\in\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\prod_{k=1}^{n+1}a_k\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\times a_{n+1}\right)\\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)+\ln(a_{n+1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)+\ln(a_{n+1})\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\ln(a_k)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)$$

2. Cette égalité vient de la propriété fondamentale de l'exponentielle

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\qquad \exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$$

Pour démontrer rigoureusement cette égalité, on procède par récurrence sur n.

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « pour tous $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, $\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\exp(\alpha_k)$ ».

Initialisation : $(n=1)$ $\exp(\alpha_1)=\exp(\alpha_1)$.
Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 1$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi.
Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\alpha_{n+1}\right)\\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\times\exp(\alpha_{n+1})\\ &= \prod_{k=1}^{n}\exp(\alpha_k)\times\exp(\alpha_{n+1})\\ &= \prod_{k=1}^{n+1}\exp(\alpha_k)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \qquad \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(\alpha_k)$$

3. En utilisant les questions précédentes, et les formules de sommes classiques, on a :

$$R_n = \prod_{k=1}^{n} e^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n} k\right) = \ln(n!)$$

Solution 20 –

1. Soit $n \geqslant 2$. Alors, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{k^3-1}{k^3-(-1)} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k-(-1))(k^2-k+1)} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \frac{k}{k+1} \times \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \\ &= \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right) \end{aligned}$$

Les deux premiers produits sont télescopiques. On a

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{2}{n+1} = \frac{1}{n}.$$

Donc

$$P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

2. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{(k+1)^2-k}{k^2-(k-1)}.$$

Ainsi, le dernier produit de P_n est également télescopique et

$$P_n = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n^2+n+1}{2^2-2+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}.$$

Solution 21 –

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{n-1!} = n.$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n!}{(n-2)! \times 2} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)! \times 2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

Solution 22 – Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 3^{2n+1} + 2^{4n+2} &= 3^{2n+1} + 2^{2(2n+1)} \\ &= 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \\ &= 3^{2n+1} - (-4)^{2n+1} \\ &= (3-(-4)) \sum_{k=0}^{n-1} 3^k (-4)^{n-1-k} \text{ d'après la formule 2 du binôme} \\ &= 7 \times m \end{aligned}$$

où $m = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k (-4)^{n-1-k}$ est un entier. Donc $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Solution 23 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Par propriétés de la partie réelle, et comme les coefficients binomiaux sont réels,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Re e(e^{i\left(ka+(n-k)b\right)}) = \Re e\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i\left(ka+(n-k)b\right)}\right)$$

On s'intéresse donc au calcul de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i\left(ka+(n-k)b\right)}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ika}\,\mathrm{e}^{i(n-k)b} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{ia})^k (\mathrm{e}^{ib})^{n-k} \end{aligned}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton puis une factorisation par l'angle moitié, cela donne

$$\begin{aligned} S_n &= (\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib})^n \\ &= (2\,\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}} \cos(\frac{a-b}{2}))^n \\ &= 2^n\,\mathrm{e}^{in\frac{a+b}{2}} \cos^n(\frac{a-b}{2}) \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$T_n = 2^n \cos\left(n\frac{a+b}{2}\right)\cos^n\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Solution 24 –

1. • Si $t \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors on a que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(kt) = 1$ et $\sin(kt) = 0$, donc $S_1(t) = n+1$ et $S_2(t) = 0$.

   • Si $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on définit $S(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{it})^k$. Il s'agit d'une somme d'une suite géométrique.
   Comme $t \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors $\mathrm{e}^{it} \neq 1$, donc

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t/2}}{\mathrm{e}^{it/2}} \frac{2\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{int/2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

   Comme $S_1(t) = \Re e(S(t))$ et $S_2(t) = \Im m(S(t))$, on obtient

$$S_1(t) = \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \qquad S_2(t) = \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. La fonction S_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que somme de fonctions dérivables) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$S_1'(t) = -\sum_{k=0}^{n} k\sin(kt) = -S_3(t).$$

   On réécrit S_1 à l'aide d'une formule trigonométrique ($\sin(a)\cos(b)$) :

$$S_1(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)+\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

   Donc, si $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\begin{aligned} S_3(t) &= -S_1'(t) \\ &= -\frac{\frac{2n+1}{2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - (2n+1)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

   En utilisant l'expression de $\sin(a-b)$, on obtient :

$$S_3(t) = \frac{\sin(nt) - 2n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \cos(kt)^4 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ikt}+\mathrm{e}^{-ikt}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4ikt} + 4\,\mathrm{e}^{2ikt} + 6 + 4\,\mathrm{e}^{-2ikt} + \mathrm{e}^{-4ikt}) \\ &= \frac{1}{8}(\cos(4kt) + 4\cos(2kt) + 3) \end{aligned}$$

   En sommant cette relation pour k allant de 0 à n, on obtient

$$S_4(t) = \frac{1}{8}(S_1(4t) + 4S_1(2t) + 3(n+1)).$$

Solution 25 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\,\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{3}}$. Comme $S_n = \Re e(T_n)$, on s'intéresse au calcul de T_n. On remarque que

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\right)^k.$$

On reconnait les termes successifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2} \neq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
T_n &= \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\right) \frac{1-\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\right)^n}{1-\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}} \\
&= \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2^n} \times \frac{2^n - e^{\frac{in\pi}{3}}}{2-e^{\frac{i\pi}{3}}} \\
&= \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2^n} \times \frac{(2^n - e^{\frac{in\pi}{3}})(2-e^{\frac{-i\pi}{3}})}{(2-e^{\frac{i\pi}{3}})(2-e^{\frac{-i\pi}{3}})}
\end{aligned}$$

En se rappelant que $e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{-i\pi}{3}} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{2^n} \times \frac{(2^n - e^{\frac{in\pi}{3}})(2e^{\frac{i\pi}{3}}-1)}{4-2(e^{\frac{i\pi}{3}}+e^{\frac{-i\pi}{3}})+1} \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{(2^n - e^{\frac{in\pi}{3}})(2e^{\frac{i\pi}{3}}-1)}{5-4\cos(\frac{\pi}{3})} \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{2^{n+1}e^{\frac{i\pi}{3}} - 2^n - 2e^{\frac{(n+1)i\pi}{3}} + e^{\frac{in\pi}{3}}}{3} \\
&= \frac{1}{3\times 2^n}\left(2^{n+1}e^{\frac{i\pi}{3}} - 2^n - 2e^{\frac{(n+1)i\pi}{3}} + e^{\frac{in\pi}{3}}\right)
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on en déduit que

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{3\times 2^n}\left(2^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2^n - 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3\times 2^n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3\times 2^n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3\times 2^n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2^n}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Solution 26 –

1. En posant $j = 2n+1-k$, c'est-à-dire $k = 2n+1-j$, on a que j varie de $n+1$ à $2n+1$ et
$$S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}$$
2. Comme les indices des sommes sont muets, on peut alors écrire :
$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$
Or, on sait (ou on retrouve à l'aide de la formule du binôme de Newton) que $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$, donc
$$S_n = \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}.$$

Solution 27 – Soit f_n la fonction $x \mapsto (1+x)^n$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$
$$f_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}$$
$$f_n''(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^{k-2}$$

En évaluant cette relation en 1, on obtient

$$f_n''(1) + f_n'(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$$

On utilise l'autre expression de f pour calculer $f_n''(1)$ et $f_n'(1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$$
$$f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

D'où

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$$

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !

♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !