

EXERCICES — CHAPITRE 7

Exercice 1 (♣) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Calculer u_0 et u_{10} .
2. Exprimer $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n .

Exercice 2 (♣) – Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $u_n = \frac{1}{n}$ 2. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $u_n = \ln(n)$ 4. $u_n = \frac{3^n}{n}$ |
|--|---|

Exercice 3 (♣) – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \ln(1 + |u_n|)$

Exercice 4 (♣) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n est égal à $\sqrt{1 + n}$.
3. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5 (♣) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{3n + 1}{n + 1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 3.
2. En déduire que la suite est bornée.

Exercice 6 (♣) – Les suites suivantes sont-elles minorées, majorées, bornées, monotones ?

$$\begin{aligned} u_n &= e^n, & v_n &= \frac{(-1)^n}{n+1}, \\ w_n &= (-2)^n, & x_n &= 2 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Exercice 7 (♥) – Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite de terme général u_n est monotone à partir d'un certain rang.

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $u_n = 2^n - n$ | 2. $u_n = \frac{n+1}{n-4}$ | 3. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ |
| 4. $u_n = 2n^2 + 3n - 8$ | 5. $u_n = \frac{2^n \sqrt{n}}{3^n}$ | 6. $u_n = \frac{2n+3}{n^2}$ |

Exercice 8 (♦) – Pour les suites (u_n) définies par les relations de récurrence ci-dessus, exprimer u_n en fonction de n .

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, u_0 = 0$ 3. $u_{n+1} = iu_n + 2i, u_0 = -1$ 5. $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} + 2u_n, u_0 = 0, u_1 = 3$ 7. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, u_0 = 1, u_1 = 0$ | <ol style="list-style-type: none"> 2. $u_{n+1} = 3u_n - 2, u_0 = -1$ 4. $u_{n+1} = -u_n + 4, u_0 = 10$ 6. $u_{n+2} = -\frac{1}{4}u_n, u_0 = 1, u_1 = 2$ 8. $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n, u_0 = 3, u_1 = 4$ |
|--|---|

Exercice 9 (♥) – Déterminer le terme général de la suite u définie par

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}}$$

Exercice 10 (♠) – Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, & v_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ \forall n \in \mathbb{N} & v_{n+1} = u_n + 2v_n. \end{cases}$$

On se propose de déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n . Pour cela, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, en déduire u_n en fonction de n puis v_n en fonction de n .

Exercice 11 (♥) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2. \end{cases}$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - n - \frac{1}{3}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3 .
2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 12 (♥) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \text{ Et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n .

1. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1 + u_n}{2 - 2u_n}.$$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \neq -\frac{1}{2}.$$

puis exprimer u_n en fonction de v_n .

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Remarque : on admet (provisoirement) le fait que les suites (u_n) et (v_n) soient définies pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 13 (♥) – On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + 3u_n) \end{cases}$$

1. Que dire des suites $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Donner l'expression des termes généraux de $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n , u_0 et v_0 uniquement.
3. En déduire l'expression des termes généraux u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 (♠) – Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!