

EXERCICES — CHAPITRE 7

Solution 1 –

1. On a :

$$u_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1 \text{ Et } u_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 100 - 10 + 1 = 91.$$

2. Le but est ici de comprendre la différence entre

la somme du terme de rang n et 1, $u_n + 1$ et u_{n+1} , le terme de rang $n + 1$.

- Pour $u_n + 1$, on prend l'expression de u_n et on ajoute 1 :

$$u_n + 1 = n^2 - n + 1 + 1 = n^2 - n + 2.$$

- Pour u_{n+1} , on prend l'expression de u_n dans laquelle on remplace n par $n + 1$:

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1.$$

Solution 2 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2 + 1}{n+1} - \frac{n^2 + 1}{n} = \frac{n^2 + 2n + 2}{n+1} - \frac{n^2 + 1}{n} \\ &= \frac{n(n^2 + 2n + 2)}{n(n+1)} - \frac{(n^2 + 1)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^3 + 2n^2 + 2n - n^3 - n^2 - n - 1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + n - 1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Or $n \geq 1$, donc $n - 1 \geq 0$ et $n^2 > 0$. Par ailleurs, $n(n+1) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Or, $\frac{n+1}{n} > 1$ donc $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$. Autrement dit, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

4. Étant donné l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, il semble plus judicieux d'étudier le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons tout d'abord que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{3n}{n+1}$$

Or, $n \geq 1$ donc $3n > n+1$. Autrement dit, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

Solution 3 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leq 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + e^{u_n} - u_n = e^{u_n} \geq 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + \ln(1 + |u_n|) - u_n = \ln(1 + |u_n|)$$

Or, $1 + |u_n| \geq 1$ donc $\ln(1 + |u_n|) \geq 0$. Autrement dit, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Solution 4 –

1. On a :

$$u_1 = \sqrt{1 + u_0^2} = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{1 + u_1^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Et } u_3 = \sqrt{1 + u_2^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4}.$$

2. **Énoncé :** Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n = \sqrt{1+n}$.

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $\sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

Or par hypothèse de récurrence $u_n = \sqrt{1+n}$, donc

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} = \sqrt{1+(\sqrt{1+n})^2} = \sqrt{1+1+n} = \sqrt{2+n}.$$

Donc $u_{n+1} = \sqrt{1+n+1} > 0$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n=0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{1+n}.$$

3. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1+n = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+n} = +\infty.$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Solution 5 –

1. On montre que pour tout n , $u_n - 3 \leq 0$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - 3 = \frac{3n+1}{n+1} - 3 = \frac{3n+1}{n+1} - \frac{3n+3}{n+1} = \frac{3n+1-3n-3}{n+1} = \frac{-2}{n+1} \leq 0.$$

On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \leq 0$, i.e. $u_n \leq 3$.

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien majorée par 3.

2. On sait déjà que la suite est majorée, donc il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est minorée pour en déduire qu'elle est bornée. En observant le terme u_n , on se rend compte que celui-ci est positif puisque pour tout n ,

$$3n+1 \geq 1 \geq 0 \text{ Et } n+1 \geq 1 \geq 0.$$

Donc $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On obtient alors que $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien bornée.

Solution 6 –

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. En revanche, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. En particulier, elle n'est pas bornée non plus. Enfin, la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est également croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$-1 \leq \frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} - \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Or, $\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \geq 0$ si n est pair et $\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \leq 0$ si n est impair. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{2n} = 2^{2n} = 4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad w_{2n+1} = -2^{2n+1} = -2 \times 4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

En particulier, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni majorée, ni minorée, n'est pas monotone et ne converge pas.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $n+1 \geq 1$ donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{n+1} \geq 1$ puis par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$. Dès lors, $2 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2-1 = 1$.

Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

De plus, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 0$ donc $2 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2$. Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Enfin,

$$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n+2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \geq 0 \quad \text{car } n+2 \geq n+1$$

Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Solution 7 –

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n - 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} - 2^n \geq 1$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc u est croissante.

2. La suite est bien définie à partir du rang 5. Pour tout $n \geq 5$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n-3} - \frac{n+1}{n-4} = \frac{(n+2)(n-4) - (n+1)(n-3)}{(n-3)(n-4)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-5}{(n-3)(n-4)} < 0$$

Ainsi u est décroissante (à partir du rang 5, qui est le rang minimal pour qu'elle soit bien définie).

3. La suite des inverses est décroissante, donc u est décroissante (à partir du rang 1, qui est le rang minimal pour qu'elle soit bien définie).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$?

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + 3(n+1) - 8 - (2n^2 + 3n - 8) = 4n + 5 > 0$$

Donc u est croissante.

5. Pour $n \geq 0$, $u_n \neq 0$. Pour tout $n > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}3^n}{2^n\sqrt{n}3^{n+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

On détermine quand est-ce que cette quantité est supérieure à 1.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}} > 1 &\iff \frac{n+1}{n} > \frac{9}{4} \\ &\iff n+1 > \frac{9}{4}n \quad \text{car } n > 0 \\ &\iff \frac{4}{5} > n \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, donc u est décroissante à partir du rang 1 (mais pas à partir du rang 0 car $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{2}{3}$).

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)^2} - \frac{2n+3}{n^2} = \frac{(2n+5)n^2 - (2n+3)(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2n^2 - 8n - 3}{n^2(n+1)^2} < 0$$

Donc u est décroissante.

Solution 8 –

1. Soit $c \in \mathbb{R}$.

$$c = \frac{1}{2}c + 1 \iff c = 2.$$

On pose la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n}v_0 = \frac{1}{2^n}(-2) = \frac{-1}{2^{n-1}}$. On en déduit

$$u_n = \frac{-1}{2^{n-1}} + 2.$$

2. Soit $c \in \mathbb{R}$.

$$c = 3c - 2 \iff c = 1.$$

On pose la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3v_n.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n v_0 = -2 \cdot 3^n$. On en déduit

$$u_n = -2 \cdot 3^n + 1.$$

3. Soit $c \in \mathbb{C}$.

$$c = ic + 2i \iff c(1-i) = 2i \iff c = \frac{2i}{(1-i)} = \frac{2i(1+i)}{2} = i - 1.$$

On pose la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - i + 1$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - i + 1 = iu_n + 2i - i + 1 = i(u_n + 1 - i) = iv_n.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison i .

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = i^n v_0 = -i \cdot i^n = i^{n+3}$. On en déduit

$$u_n = i^{n+3} + i - 1.$$

4. Soit $c \in \mathbb{R}$.

$$c = -c + 4 \iff c = 2.$$

On pose la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -u_n + 4 - 2 = -v_n.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1 . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n v_0 = 8(-1)^n$. On en déduit

$$u_n = 8(-1)^n + 2.$$

5. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 - \frac{5}{2}r - 2 = 0$, dont les solutions sont $x_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{4}$ et $x_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$. Donc il existe λ et μ réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

En $n = 0$, cela donne $\lambda + \mu = 0$.

En $n = 1$, cela donne $\lambda \frac{5 + \sqrt{57}}{4} + \mu \frac{5 - \sqrt{57}}{4} = 3$.

En résolvant le système formé de ces deux relations, on trouve $\lambda = \frac{6}{\sqrt{57}}$ et $\mu = \frac{-6}{\sqrt{57}}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{6}{\sqrt{57}} (x_1^n - x_2^n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{6}{\sqrt{57}} x_1^n \left(1 - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^n \right).$$

6. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 + \frac{1}{4} = 0$, dont les solutions sont $x_1 = \frac{i}{2} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $x_2 = \frac{-i}{2}$. Donc il existe λ et μ réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2^n} (\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)).$$

En $n = 0$, cela donne $\lambda = 1$.

En $n = 1$, cela donne $\frac{1}{2}\mu = 2$ et donc $\mu = 4$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2^n} (\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| = \frac{1}{2^n} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right| \leq \frac{5}{2^n}.$$

7. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 - 4r + 4 = 0$, qui a une unique solution double 2. Donc il existe λ et μ réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$

En $n = 0$, cela donne $\lambda = u_0 = 1$.

En $n = 1$, cela donne alors $2(\lambda + \mu) = u_1 = 0$ et donc $\mu = -\lambda = -1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (1 - n)2^n.$$

8. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 - r - 6 = 0$, qui a deux solutions réelles -2 et 3 . Donc il existe λ et μ réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda(-2)^n + \mu 3^n.$$

En $n = 0$, cela donne $\lambda + \mu = u_0 = 3$.

En $n = 1$, cela donne $-2\lambda + 3\mu = u_1 = 4$.

En combinant ces deux relations, on a $5\mu = 10$, donc $\mu = 2$ et $\lambda = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (-2)^n + 2 \times 3^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = 3^n \left(\left(\frac{-2}{3} \right)^n + 2 \right)$$

Solution 9 – En calculant les premiers termes, on conjecture que $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons-le par récurrence.

Initialisation : D'après l'énoncé, on a bien $u_1 = 1 = \frac{1}{1}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $u_n = \frac{1}{n}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + n}$$

Donc $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$.

Solution 10 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 3u_{n+1} + 2u_n + 4v_n \\ &= 3u_{n+1} + 2(3u_n + 2v_n) - 4u_n = 3u_{n+1} + 2u_{n+1} - 4u_n \\ &= 5u_{n+1} - 4u_n \end{aligned}$$

On a donc bien une relation linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 4 = 0$. Les deux racines de cette équation sont $r = 1$ et $r = 4$. Ainsi, il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = A \times 1^n + B \times 4^n = A + B \times 4^n$$

Or, $u_0 = 1$ donc $A + B = 1$ et $u_1 = 3u_0 + 2v_0 = 5$ donc $A + 4B = 5$. Ce système admet pour unique solution $A = -\frac{1}{3}$ et $B = \frac{4}{3}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \times 4^n = -\frac{1}{3} + \frac{4^{n+1}}{3}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = 4u_n + 4v_n = 4(u_n + v_n)$. Ainsi, $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 2 \times 4^n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 2 \times 4^n - u_n = 2 \times 4^n + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \times 4^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 4^n$$

Solution 11 –

- Grâce à la donnée de u_0 et de la formule de récurrence pour calculer un terme à partir du précédent, je suis capable de calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$u_1 = -2u_0 + 3 \times 0 + 2 = -2 \times 1 + 0 + 2 = -2 + 2 = 0, \quad u_2 = -2u_1 + 3 \times 1 + 2 = -2 \times 0 + 3 + 2 = 5$$

$$\text{Et } u_3 = -2u_2 + 3 \times 2 + 2 = -2 \times 5 + 6 + 2 = -10 + 8 = -2.$$

Maintenant que pour $n \in \{1, 2, 3\}$ je connais les termes u_n , je peux calculer les termes $v_n = u_n - n - \frac{1}{3}$:

$$v_1 = u_1 - 1 - \frac{1}{3} = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}, \quad v_2 = u_2 - 2 - \frac{1}{3} = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Et } v_3 = u_3 - 3 - \frac{1}{3} = -2 - \frac{10}{3} = -\frac{16}{3}.$$

- Pour montrer que la suite est géométrique, je dois prendre deux termes consécutifs quelconques de la suite et montrer que j'obtiens un terme en multipliant le précédent par une valeur ne dépendant pas de n . En regardant les trois premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ calculés précédemment, je me dis que la raison doit être égale à -2 .

Je fixe $n \in \mathbb{N}$ et j'exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - \frac{1}{3} \\ &= -2u_n + 3n + 2 - n - 1 - \frac{1}{3} \\ &= -2u_n + 2n + \frac{2}{3} \\ &= -2 \left(v_n + n + \frac{1}{3} \right) + 2n + \frac{2}{3} \\ &= -2v_n - 2n - \frac{2}{3} + 2n + \frac{2}{3} \\ &= -2v_n \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, j'ai montré que $v_{n+1} = -2v_n$. Il s'agit de la formule de récurrence d'une suite géométrique. Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien géométrique, de raison $q = -2$.

- Puisque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, je connais sa formule explicite. Il me suffit de calculer son premier terme : $v_0 = u_0 - 0 - \frac{1}{3} = 1 - 0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3} \times (-2)^n = -\frac{(-2)^{n+1}}{3}.$$

Je connais désormais une expression explicite de v_n et l'énoncé me donne une relation entre v_n et u_n . Ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - n - \frac{1}{3} \iff u_n = v_n + n + \frac{1}{3} = -\frac{(-2)^{n+1}}{3} + n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (1 - (-2)^{n+1}) + n.$$

Solution 12 –

- Calculons u_1 et u_2 , on a :

$$u_1 = \frac{7}{5} \text{ Et } u_2 = \frac{19}{12}.$$

On a, d'une part :

$$u_1 - u_0 = \frac{7}{5} - 3 = -\frac{8}{5} \neq u_2 - u_1 = \frac{11}{60}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique. On a, d'autre part :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{15} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{95}{84}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas géométrique.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1+u_{n+1}}{2-2u_{n+1}} \\ &= \frac{1+\frac{2u_n+3}{u_n+2}}{2-2 \times \frac{2u_n+3}{u_n+2}} \\ &= \frac{u_n+2+2u_n+3}{u_n+2} \times \frac{u_n+2}{2(u_n+2)-2(u_n+3)} \\ &= \frac{3u_n+3}{-2u_n+2} \\ &= 3 \times \frac{u_n+1}{2-2u_n} \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \frac{1+u_0}{2-2u_0} = \frac{4}{-4} = -1$. On en déduit donc pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -3^n.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3^n \in \mathbb{Z}$ donc $v_n \neq -\frac{1}{2}$.

4. Inversons la relation $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$. On a, comme $v_n \neq -\frac{1}{2}$ les équivalences suivantes pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n} \iff (2-2u_n)v_n = 1+u_n \iff (1+2v_n)u_n = 2v_n-1 \iff u_n = \frac{2v_n-1}{1+2v_n}.$$

On en déduit donc l'expression de u_n en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{-2 \times 3^n - 1}{1 - 2 \times 3^n} = \frac{2 \times 3^n + 1}{2 \times 3^n - 1}.$$

Solution 13 –

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) + \frac{1}{4}(v_n + 3u_n) = u_n + v_n.$$

Donc la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{4}(v_n + 3u_n) = \frac{-1}{2}(u_n - v_n).$$

Donc la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{-1}{2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n + v_n = u_0 + v_0, \quad u_n - v_n = \frac{1}{(-2)^n}(u_0 - v_0).$$

3. En sommant ces deux relations, on a : $u_n = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{(-2)^n}\right)u_0 + \left(1 - \frac{1}{(-2)^n}\right)v_0 \right)$

En les soustrayant, $v_n = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{(-2)^n}\right)u_0 + \left(1 + \frac{1}{(-2)^n}\right)v_0 \right)$

Solution 14 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée vérifiant la relation de l'énoncé. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2$. Les racines de cette équation sont $r = 1$ et $r = 2$. Il existe donc A et B dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = A + B \times 2^n$$

Or, si $B \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

À l'inverse, si $B = 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante, donc bornée et il est clair que toutes les suites constantes vérifient la relation de récurrence de l'énoncé.

Ainsi, les suites bornées vérifiant la relation de récurrence de l'énoncé sont les suites constantes.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!