EXERCICES — CHAPITRE 6

Exercice 1 (♣) – Soit f la fonction $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$. f est-elle bijective ?

Exercice 2 (♥) – On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array}$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. La fonction f est-elle bijective ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
   Soit $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array}$ et $\widetilde{f}^{-1}$ la bijection réciproque de $\widetilde{f}$.
4. (a) Préciser les variations de $(\widetilde{f})^{-1}$ et ses limites aux bornes de son ensemble de départ.
   (b) Calculer $\widetilde{f}^{-1}(-1/\mathrm{e})$, $\widetilde{f}^{-1}(0)$, et $\widetilde{f}^{-1}(e)$.
   (c) Déterminer le domaine D sur lequel la fonction $\widetilde{f}^{-1}$ est dérivable. Montrer que pour tout $y \in D$, $(\widetilde{f}^{-1})'(y) = \dfrac{1}{y+\exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)}$.
   Calculer $(\widetilde{f}^{-1})'(0)$ et $(\widetilde{f}^{-1})'(\mathrm{e})$.

Exercice 3 (♣) – Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $]0,4[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^x} \quad \text{Et} \quad \forall y \in]0,4[,\quad g(y) = \ln\left(\frac{4}{y}-1\right).$$

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,4[$.
2. (a) Pour tout $y \in]0,4[$, calculer $f\big(g(y)\big)$.
   (b) Que représente la fonction g pour la fonction f ?
3. Déterminer les réels x tels que $0.05 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Exercice 4 (♥) – On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow \quad \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto \quad \dfrac{x+1}{x-2} \end{cases}$.

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 5 (♥) – On définit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \longrightarrow \quad \left[-3;\dfrac{1}{2}\right[\\ x & \longmapsto \quad \dfrac{x^2-3}{2x^2+1} \end{cases}$.

Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1}.

Exercice 6 (♥) – On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow \quad \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x & \longmapsto \quad \dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$.

Déterminer $f\circ f$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Exercice 7 (♥) – On considère la fonction définie par $f : x \mapsto 2\sqrt{x}-x$. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 8 (♥) – Considérons la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e}^{-1};+\infty[$ dans un ensemble à préciser. On note g la fonction réciproque de cette bijection.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de g. On note I ce domaine.
3. Justifier que g est deux fois dérivable sur I.
4. Calculer $g(\mathrm{e})$, $g'(\mathrm{e})$ et $g''(\mathrm{e})$.

Exercice 9 (♠♦) – Simplifier les expressions suivantes :

$$\mathrm{Arctan}(2)+\mathrm{Arctan}(3)+\mathrm{Arctan}(2+\sqrt{3})$$

$$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)+\mathrm{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right)+\mathrm{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right)$$

Exercice 10 (♠) – Donner une expression plus simple de

$\cos(\mathrm{Arctan}\,x)$, $\sin(\mathrm{Arctan}\,x)$, $\tan(\mathrm{Arccos}\,x)$,
$\cos(2\,\mathrm{Arccos}(x))$, $\sin(2\,\mathrm{Arctan}(x))$.

On précisera pour quelles valeurs de x ces expressions sont bien définies.

Exercice 11 (♠) –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Arctan}(x)$ est un argument du nombre complexe $1+ix$.
2. En déduire la valeur de $\mathrm{Arctan}(2)+\mathrm{Arctan}(3)$.

Exercice 12 (♦) – Montrer les relations suivantes sur des intervalles que l'on précisera

$$\operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 13 (♠♦) – Trouver une expression plus simple de la fonction

$$x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\operatorname{Arctan}(x)$$

sur son ensemble de définition.

Exercice 14 (♥) –

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = sgn(x)\frac{\pi}{2},$$

   où $sgn(x)$ désigne le signe de x, c'est à dire 1 si x est positif et -1 sinon.
2. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) : \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

   Démontrer que (E) admet une unique solution.
3. Résoudre (E).

Exercice 15 (♥) – Montrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16 (♦) – Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !

♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !