Exercices — Chapitre 5

Exercice 1 (♣) – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

1. $a(x) = x^4 - 5x^2 + 2x + 1$
2. $b(x) = x + \sqrt{x}$
3. $c(x) = \dfrac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$
4. $d(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
5. $e(x) = \dfrac{x+6}{x^2 + 5x + 1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x-2}$
7. $g(x) = \dfrac{8x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$
8. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$
9. $j(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
10. $k(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{2x^2 - 3x - 9}$
11. $l(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$
12. $m(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

Exercice 2 (♣) – Déterminer le domaine de définition de

$$f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} \times (\exp(x) + \sqrt{1-x}).$$

Exercice 3 (♣) – Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle définie par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right).$$

Exercice 4 (♣) – On définit la fonction $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(3x+2)^2 \end{array}$. Décrire k comme la composée de 3 fonctions réelles simples.

Exercice 5 (♥) – Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = |\tan(x)| + (\cos(x))^2$ puis étudier sa parité et sa périodicité. Quelles propriétés a sa représentation graphique ?

Exercice 6 (♣) – Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{3+2x^3}$.
Montrer que

$$\forall x \in [-1,1], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Exercice 7 (♣) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.
Montrer que la fonction f est majorée par 2. En déduire que f est bornée.

Exercice 8 (♥) – Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$
$$(2) \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ |f(x)| \leqslant M.$$

Exercice 9 (♣) – Résoudre les équations et inéquations d'inconnue x réelle :

1. (E_1) $\ln(x-2) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$
2. (E_2) $\dfrac{1}{2}\ln(3x-1) < \ln(x+1)$
3. (E_3) $e^{2x} + 3e^x < 4$
4. (E_4) $\ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) = 4$
5. (E_5) $\ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) \geqslant 4$
6. (E_6) $\big(\exp(x)\big)^2 = \exp(1-2x)$
7. (E_7) $\big(\exp(x)\big)^2 \leqslant \exp(1-2x)$
8. (E_8) $2^{x^3} = 3^{x^2}$
9. (E_9) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad (x > 0)$

Exercice 10 (♣) – Résoudre les équations ou inéquations d'inconnue réelle x.

1. $(E_1) :$ $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$;
2. $(E_2) :$ $2\ln x + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$;
3. $(E_3) :$ $\exp(x) - 5 + 6\exp(-x) > 0$;
4. $(E_4) :$ $\exp(3x) - 3\exp(2x) + 3\exp(x) = 1$;
5. $(E_5) :$ $(x^2)^x = x^{(x^2)}$;
6. $(E_6) :$ $5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$;
7. $(E_7) :$ $8^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2 \times 8^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}$;
8. $(E_8) :$ $\dfrac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2\ln\sqrt{1+x}$;
9. $(E_9) :$ $\mathrm{ch}(x) = -2$;
10. $(E_{10}) :$ $\mathrm{ch}(x) = 3$.

Exercice 11 (Trigonométrie hyperbolique) **(♣) –**
Soit $(a,b,x) \in \mathbb{R}^3$. Établir les formules suivantes :

1. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$
2. $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)$
3. $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$
4. $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$
5. $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$

Exercice 12 (♣) – Étudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$:

1. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)}{\exp(2x)}$
2. $g : x \mapsto 2\,\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}(2x)$.

Exercice 13 (♠) –

1. Soit $y \in [1, +\infty[$. Montrer que l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ d'inconnue x réelle possède deux solutions (si $y > 1$), qui sont opposées l'une de l'autre. Exprimer la solution positive en fonction de y.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution de l'équation $\text{sh}(x) = y$.

Exercice 14 (♣) – On considère les fonctions suivantes :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^x \end{array} \quad \text{et} \quad k : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x^2+3}\ln(x). \end{array}$$

1. Étudier les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$, et les limites de k en $+\infty$ et 0.
2. Justifier que h et k sont dérivables sur leur ensemble de définition et calculer leurs dérivées.

Exercice 15 (♣) – Quelles sont les variations de $p : x \mapsto \ln(\cos(x))$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$?

Exercice 16 (♣) – Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + \sin(4x+3) \end{array}$ est périodique et bornée.

Exercice 17 (♠) – Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha \lfloor x \rfloor \end{array}$.
Montrer que f est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 18 (♦) – D'après les théorèmes classiques de dérivation, déterminer sur quelle partie de leur ensemble de définition il est certain que les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)} \times (\exp(x) + \sqrt{x})$ et $\ell : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ sont dérivables puis calculer leurs dérivées.

Exercice 19 (♦) – Calculer la dérivée troisième de $f : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) + x^2. \end{array}$

Exercice 20 (♥) – Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles et allure de la courbe représentative) :

1. $f_1 : x \mapsto x^x$; **2.** $f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$; **3.** $f_3 : x \mapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan(x)}$.

Exercice 21 (♦) – Pour chacune des fonctions f_i suivantes :

1. Déterminer leur domaine de définition $\mathcal{D}_{f_i}$.
2. Déterminer sur quelle partie de $\mathcal{D}_{f_i}$ les théorèmes généraux de dérivabilité assurent que f_i est dérivable.
3. Calculer sa dérivée.

$f_1 : x \mapsto \sin(3x-5)$ $\qquad f_2 : x \mapsto \left(\ln(x) + 3x - \mathrm{e}^x\right)^4$

$f_3 : x \mapsto x\exp\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ $\qquad f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x(2-x)}{1+x}}$

$f_5 : x \mapsto \ln\left(1 - \exp(x)\right)$ $\qquad f_6 : x \mapsto \sqrt{1 - \sin(x)}$

$f_7 : x \mapsto x^2 \ln\left(\sqrt{x}\right)$ $\qquad f_8 : x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}\cos\left(\sqrt{x}\right)$

$f_9 : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(x)}\cos\left(\mathrm{e}^x\right)$ $\qquad f_{10} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right|\right)$

Exercice 22 (♦) – Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2\ln x - x}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x - 3}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + 2}{x^8 - 1}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(1/x)$ **5.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$ **6.** $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \exp\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2\ln x}$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left(\frac{x^2+\ln(x)}{1+x^3}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$

9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{\ln x + \sqrt{x}}$ **10.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2^x)}{x+1}$ **11.** $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

12. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (1+x)^{1/x}$ **13.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Exercice 23 (♥) – À partir des graphes des fonctions usuelles et de transformations simples, tracer, sans étude, le graphe des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \exp(x+1)$ $\qquad f_2 : x \mapsto 2 + \cos(x)$ $\qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{1-x}$

$f_4 : x \mapsto 1 - \exp(x)$ $\qquad f_5 : x \mapsto 3 - \sqrt{2+x}$ $\qquad f_6 : x \mapsto \ln(1-x) + 2$

$f_7 : x \mapsto \sin(3x)$ $\qquad f_8 : x \mapsto 3\sin(x) + 1$ $\qquad f_9 : x \mapsto 3 - \exp(-2x)$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{1}{2} + \cos(x + \pi/4)$ $\qquad f_{11} : x \mapsto \dfrac{2+x}{1+x}$ $\qquad f_{12} : x \mapsto \dfrac{3+x}{1-x}$

Exercice 24 (♥) – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - 1 + x.$$

1. (a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

2. (a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) Justifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$
   (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées à la question **2.**.
4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x, la relation
   $$f''(x) = \frac{2-x}{e^x}.$$
   Étudier la convexité de f.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 25 (♥) – On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} + x$$

. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f.
   Calculer de même la dérivée f'' de f'. Vérifier que pour tout réel x :
   $$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$$
   (b) Étudier la convexité de f. Vérifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.
   (c) Déterminer le sens de variation de f'. Vérifier que $f'(0) = \frac{3}{4}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites de f calculées en 2.a).
3. (a) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   (b) Justifier de même que la droite $\left(D'\right)$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
   (c) On note A le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.
   (d) Tracer sur une même figure les droites (D), $\left(D'\right)$ et (T) ainsi que l'allure de la courbe (C).

Exercice 26 (♥) – On introduit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

1. Déterminer le domaine définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, puis montrer que f' est du signe de $h : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la fonction h ainsi définie et déterminer son signe.
4. Dresser le tableau des variations de f, déterminer ses limites, puis tracer rapidement son graphe.

Exercice 27 (♠) – Étudier et tracer le graphe de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2+\cos(x)}{-3+\cos(x)} \end{array}$.

Exercice 28 (♠) – Soit f une fonction dont l'expression est $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.
Étudier f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 29 (♠) – Soit k un réel fixé. On considère la fonction $f_k : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+k}$.

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}_k$ de définition de f_k.
2. Montrer que la courbe représentative Γ_k de f_k a la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ pour axe de symétrie. En déduire un domaine d'étude $\mathcal{E}_k$ de la fonction.
3. Sur quel partie $\mathcal{A}_k$ de $\mathcal{E}_k$ les théorèmes classiques assurent-ils que f est dérivable ? Calculer f' sur $\mathcal{A}_k$.
4. Dresser le tableau des variations de f_k sur $\mathcal{E}_k$. Préciser les tangentes horizontales éventuelles.
5. Calculer la limite de $f_k(x) - x$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. En déduire qu'il existe un réel a tel que $f_k(x) - (x+a)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire que Γ_k possède une asymptote dont on précisera une équation.
7. Montrer qu'il existe $c_k \in \mathbb{R}$ tel que $f_k(x) = \sqrt{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + c_k}$ pour tout $x \in \mathcal{E}_k$. En déduire la position de Γ_k par rapport à la droite d'équation $y = x + \dfrac{3}{2}$.
8. Tracer Γ_k.

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !