

EXERCICES — CHAPITRE 5

Solution 1 –

1. a est une fonction polynomiale donc

$$D_a = \mathbb{R}.$$

2. b est une somme de la forme $u + v$ avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Or $D_u = \mathbb{R}$ et $D_v = \mathbb{R}_+$, donc

$$D_b = D_u \cap D_v = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+.$$

3. c est une fraction rationnelle donc il faut déterminer les valeurs interdites. Pour ce faire, il faut résoudre $x^2 + 5x + 6 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Il y a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ Et } x_2 = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Ainsi

$$D_c = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}.$$

4. d est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 3x - 10$. Pour déterminer son domaine de définition, on résout $x^2 + 3x - 10 \geq 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-3 - 7}{2} = -5 \text{ Et } x_2 = \frac{-3 + 7}{2} = 2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
$x^2 + 3x - 10$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi

$$D_d =]-\infty, -5] \cup [2, +\infty[.$$

5. e est une fraction rationnelle donc il faut déterminer les valeurs interdites. Pour ce faire, il faut résoudre $x^2 + 5x + 1 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 25 - 4 = 21$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \text{ Et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}.$$

Donc

$$D_e = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

6. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto 3x - 2$. Pour déterminer son domaine de définition, il faut résoudre l'inéquation $u(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$3x - 2 \geq 0 \iff 3x \geq 2 \iff x \geq \frac{2}{3}.$$

Donc

$$D_f = \left[\frac{2}{3}, +\infty \right[.$$

7. g est une fraction rationnelle donc il faut déterminer les valeurs interdites. Pour ce faire, il faut résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2 \text{ Et } x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

Donc

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}.$$

8. h est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto x^2 - 3x - 18$. Pour déterminer son domaine de définition, il faut résoudre $u(x) \geq 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 9 + 72 = 81$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{3 - 9}{2} = -3 \text{ Et } x_2 = \frac{9 + 3}{2} = 6.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-3	6	$+\infty$	
$x^2-3x-18$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc

$$D_h =]-\infty, -3] \cup [6, +\infty[.$$

9. j est une somme de la forme $u + v$ avec $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Or $D_u = \mathbb{R}^*$ et $D_v = \mathbb{R}_+$, donc

$$D_j = D_u \cap D_v = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^*.$$

10. k est une somme de la forme $u + v$ avec $u : x \mapsto \sqrt{x+7}$ et $v : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3x - 9}$. Donc $D_k = D_u \cap D_v$.

- Domaine de définition de u :

On résout $x+7 \geq 0 : x+7 \geq 0 \iff x \geq -7$. Donc $D_u = [-7, +\infty[$.

- Domaine de définition de v :

On résout $2x^2 - 3x - 9 \geq 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 9 + 72 = 81$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{3-9}{4} = -\frac{3}{2} \text{ Et } x_2 = \frac{3+9}{4} = 3.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		3	$+\infty$	
$2x^2-3x-9$		+	0	-	0	+

$$\text{Donc } D_v = \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup [3, +\infty[.$$

En conclusion,

$$D_k = D_u \cap D_v = [-7, +\infty[\cap \left(\left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup [3, +\infty[\right) = \left[-7, -\frac{3}{2} \right] \cup [3, +\infty[.$$

Remarque : Comme D_u est l'ensemble des réels supérieurs ou égaux -7 , l'intersection de D_u et D_v correspond à tous les éléments de D_v supérieurs ou égaux à -7 .

11. l est un quotient de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 5x - 7$ et $v : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x - 2}$, donc

$$D_l = D_u \cap D_v \setminus \{x \in D_u \cap D_v \mid v(x) = 0\}.$$

- Domaine de définition de u :

u est une fonction polynomiale donc $D_u = \mathbb{R}$.

- Domaine de définition de v :

On résout $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ Et } x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x^2+3x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Donc } D_v =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

- Solutions de $v(x) = 0$:

Les solutions de $v(x) = 0$ sont les x tels que $2x^2 + 3x - 2 = 0$. On a déjà vu que les solutions de cette équation sont -2 et $\frac{1}{2}$.

En conclusion,

$$D_l = \mathbb{R} \cap \left(]-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[\right) \setminus \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\} =]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

12. m est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto \frac{2-x}{2+x}$. Pour déterminer le domaine de définition de u , il me faut donc résoudre $u(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord,

$$2-x \geq 0 \iff x \leq 2 \text{ Et } 2+x \geq 0 \iff x \geq -2,$$

ce qui permet de déduire le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$	
$2+x$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{2-x}{2+x}$	$-$		$+$	0	$-$

Donc l'ensemble de définition de la fonction m est

$$D_m =]2, 2[.$$

Solution 2 – $\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{x \mapsto \sqrt{x}} = \mathbb{R}_+$, donc $\mathcal{D}_{x \mapsto \exp(x) + \sqrt{x}} = \mathbb{R}_+$.

$\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) = 0\}$.

Or, on sait que $\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) = 0\} = \{1\}$.

D'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Solution 3 – $\frac{x+1}{x-2}$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On note donc

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-2} \end{array}.$$

Alors, le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathcal{D}_h \mid f(x) \in \mathcal{D}_{\ln}\}$.

Soit $x \in \mathcal{D}_h$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} > 0 &\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ Et } (x+1 \text{ et } x-2 \text{ sont de même signe}) \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[\end{aligned}$$

Le domaine de définition de g est donc $] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

Solution 4 – On définit les fonctions suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+2 \end{array}$$

Alors, $k = f \circ \sin \circ g$.

Solution 5 – $f(x)$ est bien définie si et seulement si $\tan(x)$ est bien définie, c'est à dire si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(-x) = |\tan(-x)| + (\cos(-x))^2 = |-\tan(x)| + (\cos(x))^2 = |\tan(x)| + (\cos(x))^2 = f(x).$$

$$f(x+\pi) = |\tan(x+\pi)| + (\cos(x+\pi))^2 = |\tan(x)| + (-\cos(x))^2 = |\tan(x)| + (\cos(x))^2 = f(x).$$

Donc f est paire et π -périodique. On en déduit que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et invariante par translation de vecteur $\pi\vec{i}$. On peut également remarquer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned} f(\pi-x) &= |\tan(\pi-x)| + (\cos(\pi-x))^2 \\ &= |-\tan(x)| + (-\cos(x))^2 \\ &= |\tan(x)| + (\cos(x))^2 = f(x) \end{aligned}$$

Donc la courbe représentant f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

Solution 6 – On part du domaine de définition de x , à savoir $x \in [-1, 1]$ puis on reconstitue la fonction f pas à pas.

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 = (-1)^3 \leq x^3 \leq 1^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2x^3 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 3+2x^3 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2x^3} \leq \frac{1}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$$

On a ainsi montré que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$. Et puisque $0 \leq \frac{1}{5}$, on a bien

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

Solution 7 – Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie le signe de $f(x) - 2$ et on montre que $f(x) - 2 \leq 0$.

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2}{1+x^2} - 2 = \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2x^2 - (2+2x^2)}{1+x^2} = \frac{-2}{1+x^2}$$

Le numérateur -2 est négatif. Le dénominateur $1+x^2$ est lui positif. Donc $\frac{-2}{1+x^2} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi on a bien $f(x) \leq 2$, donc f est bien majorée par 2.

Par ailleurs, le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ sont clairement positifs pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $f(x) \geq 0$. Autrement dit, f est à la fois majorée par 2 et minorée par 0.

Donc f est bornée.

Solution 8 –

▷ Supposons que pour m et M réels, on ait pour tout $x \in D$, $m \leq f(x) \leq M$.

Alors, pour tout $x \in D$,

$$f(x) \leq M \leq |M| \leq |M| + |m|.$$

$$-f(x) \leq -m \leq |m| \leq |m| + |M|$$

Donc, pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leq |m| + |M|$.

▷ Réciproquement, supposons que pour un réel M , on ait pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leq M$.

Alors, pour tout $x \in D$, on a

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Solution 9 –

1. Soit $x > 2$.

$$(E_1) \Leftrightarrow \ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln((x-1)^2)$$

$$\Leftrightarrow \ln((x-2)(x+1)) = \ln((x-1)^2)$$

Comme $\exp$ est strictement croissante,

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff (x-2)(x+1) = (x-1)^2 \\ &\iff x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + 1 \\ &\iff x = 3\end{aligned}$$

Ainsi, (E_1) admet une unique solution : 3.

2. Soit $x > \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff \ln(3x-1) < 2\ln(x+1) \\ &\iff \ln(3x-1) < \ln((x+1)^2)\end{aligned}$$

Par stricte croissance de la fonction $\exp$, on a

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff 3x-1 < x^2+2x+1 \\ &\iff 0 < x^2-x+2\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - x + 2$ est -7 , donc il est de signe constant.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = e^x$. Alors,

$$\begin{aligned}e^{2x} + 3e^x < 4 &\iff y^2 + 3y - 4 < 0 \\ &\iff (y-1)(y+4) < 0 \\ &\iff y \in]-4, 1[\\ &\iff \exp(x) \in]-4, 1[\\ &\iff x \in \mathbb{R}_-\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est donc $\mathbb{R}_-$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff \ln(2) + \ln(x) + \ln(\sqrt{3}) = 4 \\ &\iff \ln(2x\sqrt{3}) = 4\end{aligned}$$

Comme $\exp$ est strictement croissante,

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff 2x\sqrt{3} = e^4 \\ &\iff x = \frac{e^4}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Ainsi, (E_4) admet une unique solution : $\frac{e^4}{2\sqrt{3}}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff \ln(2) + \ln(x) + \ln(\sqrt{3}) \geq 4 \\ &\iff \ln(2x\sqrt{3}) \geq 4\end{aligned}$$

Comme $\exp$ est strictement croissante,

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff 2x\sqrt{3} \geq e^4 \\ &\iff x \geq \frac{e^4}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

par stricte croissance de l'exponentielle. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_5) est :

$$\left[\frac{e^4}{2\sqrt{3}}, +\infty \right[$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(E_6) &\iff e^{2x} = e^{1-2x} \\ &\iff 2x = 1 - 2x\end{aligned}$$

car $\exp$ est strictement monotone. Ainsi, (E_6) admet une unique solution : $\frac{1}{4}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(E_7) &\iff e^{2x} \geq e^{1-2x} \\ &\iff 2x \geq 1 - 2x\end{aligned}$$

car $\exp$ est strictement croissante. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_7) admet une unique solution : $\left] -\infty, \frac{1}{4} \right]$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(E_8) &\iff e^{x^3 \ln(2)} = e^{x^2 \ln(3)} \\ &\iff x^3 \ln(2) = x^2 \ln(3) \\ &\iff x = 0 \text{ Ou } x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\end{aligned}$$

Donc (E_8) admet exactement deux solutions, 0 et $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

9. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned}
 (E_9) &\iff e^{\ln(x)\sqrt{x}} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \\
 &\iff \ln(x)\sqrt{x} = x\ln(\sqrt{x}) \\
 &\iff \ln(x)\sqrt{x} = \frac{1}{2}x\ln(x) \\
 &\iff \ln(x) = 0 \text{ Ou } \sqrt{x} = 0 \text{ Ou } 2 = \sqrt{x} \\
 &\iff x = 1 \text{ Ou } x = 0 \text{ Ou } 4 = x
 \end{aligned}$$

Donc (E_9) admet exactement deux solutions, 1 et 4.

Solution 10 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3) &\iff \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(\sqrt{3x}) \\
 &\iff x+3 = 2\sqrt{3x} \\
 &\iff x^2 + 6x + 9 = 12x \\
 &\iff (x-3)^2 = 0 \\
 &\iff x = 3.
 \end{aligned}$$

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2} \quad 2x + 8 > 0 \iff x > -4 \quad x - 1 > 0 \iff x > 1.$$

Soit $x > 1$.

$$\begin{aligned}
 (E_2) &\iff \ln(x^2(2x-1)) = \ln((2x+8)(x-1)^2) \\
 &\iff x^2(2x-1) = (2x+8)(x-1)^2 \\
 &\iff 2x^3 - x^2 = (2x+8)(x^2 - 2x + 1) \\
 &\iff -5x^2 + 14x - 8 = 0
 \end{aligned}$$

Le discriminant de $-5X^2 + 14X - 8$ vaut 36, donc les racines de ce trinôme sont $-4/5$ et 2. Or $-4/5 \leq 1$, donc l'ensemble des solutions de l'équation (2) est $\{2\}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{-x} - 5 + 6e^{-x} > 0 \iff e^{-x}(e^{2x} - 5e^x + 6) > 0.$$

Or le discriminant de $X^2 - 5X + 6$ vaut 1, donc ses racines de 2 et 3. Ainsi

$$e^x - 5 + 6e^{-x} > 0 \iff e^x < 2 \text{ ou } e^x > 3 \iff x < \ln(2) \text{ ou } x > \ln(3).$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $] -\infty, \ln(2)[\cup] \ln(3), +\infty[$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x = 1 \iff (e^x - 1)^3 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{0\}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
 (x^2)^x = x^{(x^2)} &\iff \exp(x\ln(x^2)) = \exp(x^2\ln(x)) \\
 &\iff x\ln(x^2) = x^2\ln(x) \\
 &\iff 2x\ln(x) - x^2\ln(x) = 0 \\
 &\iff x(2-x)\ln(x) = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 1.
 \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{1, 2\}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 5\operatorname{ch}(x) - 4\operatorname{sh}(x) = 3 &\iff 5e^x + 5e^{-x} - 4e^x + 4e^{-x} = 6 \\
 &\iff e^x + 9e^{-x} = 6 \\
 &\iff e^{-x}(e^{2x} - 6e^x + 9) = 0 \\
 &\iff e^{-x}(e^x - 3)^2 = 0 \\
 &\iff x = \ln(3).
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{\ln(3)\}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 8^{x+4/3} - 5^{3x} = 2 \times 8^{x+1/3} + 5^{3x-1} &\iff 2^{3x+4} - 2^{3x+1} = 5^{3x-1} + 5^{3x} \\
 &\iff 2^{3x}(16-4) = 5^{3x}\frac{6}{5} \\
 &\iff \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = \frac{1}{10} \\
 &\iff \exp\left(3x\ln\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{10} \\
 &\iff 3x = \frac{-\ln(10)}{\ln(2) - \ln(5)} \\
 &\iff x = \frac{\ln(2) + \ln(5)}{3\ln(5) - 3\ln(2)}.
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \frac{\ln(2) + \ln(5)}{3\ln(5) - 3\ln(2)} \right\}$.

8. Soit $x \in]-1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 (E_8) &\iff \ln(\sqrt{x-1}(x+1)) = \ln(e^2 \sqrt{1+x}) \\
 &\iff \sqrt{x-1}(x+1) = e^2 \sqrt{x+1} \\
 &\iff \sqrt{x-1} \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} = e^2 \\
 &\iff \sqrt{(x-1)(x+1)} = e^2 \\
 &\iff (x-1)(x+1) = e^4 \\
 &\iff x^2 = 1 + e^4 \\
 &\iff x = \sqrt{1+e^4} \text{ ou } x = -\sqrt{1+e^4}.
 \end{aligned}$$

Or $1 + e^4 \geq 1$, donc $\sqrt{1+e^4} \geq 1$ puis $-\sqrt{1+e^4} \leq -1$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $\{\sqrt{1+e^4}\}$.

9. Puisque $\text{ch} \geq 1$, on obtient que l'équation n'admet pas de solution.

10. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ch}(x) = 3 \iff e^x + e^{-x} = 6 \iff e^{-x}(e^{2x} - 6e^x + 1) = 0$$

Or le discriminant de $X^2 - 6X + 1$ vaut 32, ses racines sont donc $-2\sqrt{2} + 3$ et $2\sqrt{2} + 3$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-2\sqrt{2} + 3, 2\sqrt{2} + 3\}$.

Solution 11 –

1.

$$\begin{aligned}
 \text{ch}(a) \text{ch}(b) + \text{sh}(a) \text{sh}(b) &= \frac{1}{4} \left[(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b}) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} \right. \\
 &\quad \left. + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} + e^{-a-b} \right] \\
 &= \frac{1}{4} (2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}) \\
 &= \text{ch}(a+b)
 \end{aligned}$$

2. On peut effectuer le même genre de calcul pour démontrer la deuxième formule, ou alors passer un autre chemin : En fixant b et en dérivant par rapport à a la relation $\text{ch}(a) \text{ch}(b) + \text{sh}(a) \text{sh}(b) = \text{ch}(a+b)$, on obtient précisément $\text{sh}(a+b) = \text{ch}(a) \text{sh}(b) + \text{sh}(a) \text{ch}(b)$.

3. On prend $x = a = b$ dans $\text{sh}(a+b) = \text{ch}(a) \text{sh}(b) + \text{sh}(a) \text{ch}(b)$.

4. On prend $x = a = b$ dans $\text{ch}(a) \text{ch}(b) + \text{sh}(a) \text{sh}(b) = \text{ch}(a+b)$.

5. En réutilisant les formules obtenues en 1 et 2, on obtient :

$$\text{th}(a+b) = \frac{\text{sh}(a+b)}{\text{ch}(a+b)} = \frac{\text{sh}(a) \text{ch}(b) + \text{ch}(a) \text{sh}(b)}{\text{ch}(a) \text{ch}(b) + \text{sh}(a) \text{sh}(b)}$$

Puis en divisant le numérateur et le dénominateur par $\text{ch}(a) \text{ch}(b)$ non nul, on obtient la formule demandée.

Solution 12 –

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4e^{2x}} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2e^{2x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4x}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = 1 + e^{-2x}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

Solution 13 –

1. ch est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et on sait que $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch} = +\infty$. Soit $y > 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\text{ch}(x) = y$ admet une solution sur $]0, +\infty[$. Par stricte croissance de ch , cette solution est unique.

Comme ch est pair, l'équation $\text{ch}(x) = y$ a exactement deux solutions opposées l'une de l'autre.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
 \text{ch}(x) = y &\iff e^x + e^{-x} = 2y \\
 &\iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\
 &\iff z^2 - 2yz + 1 = 0
 \end{aligned}$$

en posant $z = e^x$.

Cette équation en z a pour discriminant $\Delta = 4y^2 - 4$, qui est positif car $y \geq 1$.

Si $y > 1$, alors les deux racines de $z^2 - 2yz + 1$ sont

$$z_1 = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad z_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

Or, $y^2 > y^2 - 1 > (y-1)^2$ car $y > 1$, donc en prenant la racine carrée qui est strictement croissante, on obtient $y > \sqrt{y^2 - 1} > y - 1$ et finalement $1 > z_1 > 0$.

Or x est positif, donc $z = e^x \geq 1$. Donc z ne peut pas être z_1 . D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) = y &\iff z = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ &\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{aligned}$$

Donc l'unique solution positive de $\operatorname{ch}(x) = y$ est $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

(On remarque que cette expression est aussi valide lorsque $y = 1$)

2. sh est continue et strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} = +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) = y$ admet une unique solution réelle.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) = y &\iff e^x - e^{-x} = 2y \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\iff z^2 - 2yz - 1 = 0 \end{aligned}$$

en posant $z = e^x$.

Cette équation en z a pour discriminant $\Delta = 4y^2 + 4$, qui est strictement positif. Elle admet donc deux racines distinctes

$$z_1 = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad z_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Or, $y^2 + 1 > y^2$, donc par stricte croissance de la racine carrée, $\sqrt{y^2 + 1} > |y| \geq y$. On en déduit que $z_1 < 0$.

Or, $z = e^x$, donc z est strictement positif et ne peut donc pas valoir z_1 . z_2 est en revanche bien strictement positif, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) = y &\iff z = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

L'unique solution de $\operatorname{sh}(x) = y$ est donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Remarque culturelle : Les fonctions

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Argsh} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \operatorname{Argch} : [0, +\infty[& \rightarrow & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}$$

dont les noms respectifs se prononcent "Argument sinus hyperbolique et Argument cosinus hyperbolique" sont des fonctions usuelles des mathématiques.

Ce sont les pendants "hyperboliques" de Arcsin et Arccos .

Solution 14 –

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1. \text{ Comme on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \text{ on en déduit}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. On se trouve ici devant une forme indéterminée, c'est à dire que les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. On verra cependant que des méthodes plus subtiles permettent de déterminer la limite de h en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2+3} = \frac{2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty.$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\infty.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{\ln(x)}{x} \frac{\frac{1}{x} + 2}{1 + \frac{3}{x^2}}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2$ par quotient, mais les opérations sur les limites ne permettent pas de déterminer si $\frac{\ln(x)}{x}$ a une limite en $+\infty$. La encore, nous verrons au prochain chapitre comment faire.

2. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - x + 1$ et $\exp$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par produit de fonctions dérivables, h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x-1)e^x + (x^2-x+1)e^x \\ &= (x^2+x)e^x. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+3 > 0$, donc $\begin{matrix}]0; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+2}{x^2+3} \end{matrix}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc par produit de fonctions dérivables, k est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} k'(x) &= \ln(x) \frac{x^2+3-(x+2)(2x)}{(x^2+3)^2} + \frac{x+2}{x^2+3} \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) \frac{-x^2-4x+3}{(x^2+3)^2} + \frac{x+2}{(x^2+3)x}. \end{aligned}$$

Solution 15 – $\cos$ est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc p est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution 16 – On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+6\pi) = f(x)$, donc f est 6π -périodique. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq \left| \cos\left(\frac{x}{3}\right) \right| + |\sin(4x+3)| \leq 2.$$

Donc f est une fonction bornée.

Solution 17 –

1. Supposons que f est T -périodique. Alors $f(0) = f(T)$, donc $\lfloor \alpha T \rfloor - \alpha \lfloor T \rfloor = 0$ puis $\alpha = \frac{\lfloor \alpha T \rfloor}{\lfloor T \rfloor}$, donc $\alpha \in \mathbb{Q}$.

2. Supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+q) &= \left\lfloor \frac{p}{q}(x+q) \right\rfloor - \frac{p}{q} \lfloor x+q \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{p}{q}x + p \right\rfloor - \frac{p}{q} \lfloor x \rfloor - \frac{p}{q}q \\ &= \left\lfloor \frac{p}{q}x \right\rfloor + p - \frac{p}{q} \lfloor x \rfloor - p \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est q -périodique.

Solution 18 – $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Ainsi, f est dérivable au moins sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\ln'(x)}{\ln(x)^2} (\exp(x) + \sqrt{x}) + \frac{1}{\ln x} (\exp(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}) \\ &= -\frac{\exp(x) + \sqrt{x}}{x \ln(x)^2} + \frac{1 + 2\sqrt{x} \exp(x)}{2\sqrt{x} \ln x}. \end{aligned}$$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ est positive sur $] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$, donc ℓ est au moins dérivable sur $] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

Pour tout $x \in] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \ell'(x) &= \frac{\frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} \\ &= \frac{-3}{2\sqrt{x+1}(x-2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Solution 19 – f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x.$$

f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} + 2.$$

f'' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Solution 20 –

1. Puisque $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $g : x \mapsto x \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et il en est de même de $x \mapsto x^x$ (car $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$).

Les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables, donc $f_1 = \exp \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $g' : x \mapsto \ln(x) + 1$, donc $f_1' : x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f_1'(x) = 0 \iff \ln(x) + 1 = 0 \iff x = e^{-1}.$$

et

$$f_1'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff x \geq e^{-1}$$

donc f_1 est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.

Par ailleurs,

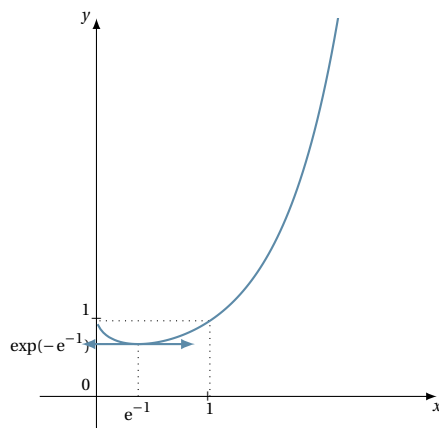
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty,$$

et,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1.$$

En résumé, puisque $f(e^{-1}) = \exp(e^{-1} \ln(e^{-1})) = \exp(-e^{-1})$ et $f_1(1) = 1$,

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+
f_1	1	$\searrow$ $\exp(-e^{-1})$	$\nearrow$ 1	$+\infty$



2. Puisque $|x| > 0 \iff x \neq 0$, $g : x \mapsto \ln|x|/x$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \ln|x|/x \geq 0 &\iff \begin{cases} \ln|x| \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln|x| \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |x| \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $D = [-1, 0[\cup]1, +\infty[$. On a montré que f_2 est la composée de g :

$D \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \ln|x|/x$ et $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $x \mapsto \sqrt{x}$, donc f_2 est définie sur D .

g est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables et $g' : x \mapsto (1 - \ln|x|)/x^2$. Puisque la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in D$,

$$g(x) = 0 \iff \ln|x| = 0 \iff |x| = 1 \iff x \in \{-1, 1\},$$

on obtient, avec le théorème de dérivation d'une fonction composée, que f_2 est dérivable sur $D \setminus \{-1, 1\}$, et

$$f_2' : x \mapsto \frac{1 - \ln|x|}{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 \ln|x|/x}}.$$

Soit $x \in D$.

$$f_2'(x) = 0 \iff 1 - \ln|x| = 0 \iff |x| = e \iff x \in \{-e, e\},$$

et

$$f_2'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln|x| \geq 0 \iff |x| \leq e \iff x \in [-e, e].$$

Ainsi f est strictement croissante sur $[-e, e] \cap D = [-1, 0[\cup]1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Par ailleurs, on a, pour tout $x > 0$, $\ln|x|/x = -(\ln(-x)/(-x))$, donc

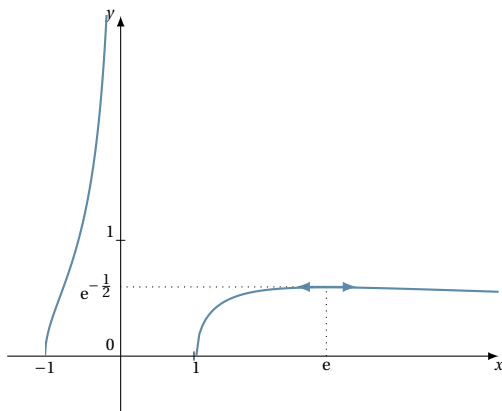
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(|x|)}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_2(x) = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0.$$

En résumé, puisque $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ et $f(e) = e^{-1/2}$,

x	-1	0	1	e	$+\infty$
$f_2'(x)$	+		+	0	-
f_2	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ 0	$e^{-1/2}$	0



3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\tan(x) = 0 \iff x \equiv 0[\pi]$$

Donc f_3 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, \pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque f est π -périodique et paire, on peut se contenter d'une étude sur $D =]0, \pi/4[\cup]\pi/4, \pi/2[$.

On remarque que, pour tout $x \in D$,

$$f_3(x) = \frac{2 \tan(x)}{\tan(x)(1 - \tan^2(x))} = \frac{2}{1 - \tan^2(x)}.$$

$g : x \mapsto \tan^2(x)$ est dérivable en tant que composée des fonctions dérivables $\tan$ et "carré", et $g' : x \mapsto 2(1 + \tan^2(x)) \tan(x)$. Ainsi, f est dérivable sur D et

$$f'_3 : x \mapsto \frac{4 \tan(x)(1 + \tan^2(x))}{(1 - \tan^2(x))^2}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in D$,

$$f'_3(x) \geq 0 \iff \tan(x) \geq 0 \iff x \in]\pi/4, \pi/2[,$$

ce qui entraîne que f_3 est décroissante sur $]0, \pi/4[$ et croissante sur $] \pi/4, \pi/2[$. Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - \tan^2(x) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_3(x) = 2$$

De plus,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x \neq \pi/4}} 1 - \tan^2(x) = 0$$

Comme pour tout $x \in]0, \pi/2[, 1 - \tan^2(x) > 0 \iff x \in]0, \pi/4[$, on en déduit :

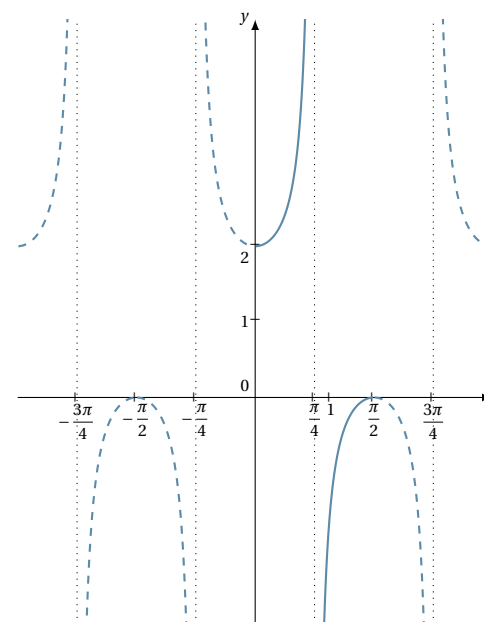
$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x < \pi/4}} f_3(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x > \pi/4}} f_3(x) = -\infty.$$

On a aussi :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} 1 - \tan^2(x) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} f_3(x) = 0.$$

En résumé,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'_3(x)$		+	+
f_3	2	$+\infty$	$-\infty$



Solution 21 –

1. f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_1(x) = 3 \cos(3x - 5).$$

2. f_2 est définie sur $\mathcal{D}_{f_2} =]0, +\infty[$. $\ln$ et $\exp$ sont dérivables sur $\mathcal{D}_{f_2}$ et $x \mapsto x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f_2 est dérivable sur $\mathcal{D}_{f_2}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_2}$,

$$f_2'(x) = 4 \left(\frac{1}{x} + 3 - e^x \right) (\ln(x) + 3x - e^x)^3.$$

3. f_3 est définie sur $\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (le seul problème est le quotient). De plus, $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et $\exp$ sont dérivables sur leur domaine de définition, donc f_3 est dérivable sur $\mathcal{D}_{f_3}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_3}$, on a

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) + x \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) \\ &= \left(1 + \frac{x}{(1+x)^2}\right) \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) \end{aligned}$$

4. Pour que f_4 soit bien définie en un réel x , il faut que $\frac{x(2-x)}{1+x}$ soit positif. Construisons un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$		
x		$-$	0	$+$			
$2-x$	$+$	0		$-$			
$1+x$			$-$	0	$+$		
$\frac{x(2-x)}{1+x}$		$+$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, $\mathcal{D}_{f_4} =]-\infty, -1[\cup]0, 2[$.

Pour ce qui est de la dérivabilité, les théorèmes généraux nous assurent que f_4 est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup]0, 2[$ (là où l'argument de la fonction racine est strictement positif). Attention, cela ne veut pas dire que f_4 n'est pas dérivable en 0 ou en 2, seulement que les théorèmes généraux ne nous disent rien à ce sujet. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_4} \setminus \{0, 2\}$,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x(2-x)}{1+x}}} \times \frac{2(1-x)(1+x) - x(2-x)}{(1+x)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{x(2-x)}} \times \frac{-x^2 - 2x + 2}{2(1+x)^2} \end{aligned}$$

5. Pour que f_5 soit bien définie en un réel x , il faut que $1 - \exp(x)$ soit strictement positif, c'est-à-dire que x soit strictement négatif.

Ainsi, $\mathcal{D}_{f_5} =]-\infty, 0[$. D'après les théorèmes généraux, f_5 y est également dérivable. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_5}$,

$$f_5'(x) = \frac{-\exp(x)}{1 - \exp(x)}$$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - \sin(x) \geq 0$. Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R}$. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc les théorèmes de dérivation généraux nous assurent que f_6 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$. Pour tout x dans cet ensemble,

$$f_6'(x) = \frac{-\cos(x)}{2\sqrt{1 - \sin(x)}}.$$

7. $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, est positive et s'annule uniquement en 0, donc f_7 est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle y est également dérivable. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_7}$,

$$\begin{aligned} f_7'(x) &= 2x \ln(\sqrt{x}) + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 2x \ln(\sqrt{x}) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

8. On doit avoir $x \neq 0$ pour que e^{-1/x^2} soit bien défini et $x \geq 0$ pour que $\cos(\sqrt{x})$ soit bien défini. Donc $\mathcal{D}_{f_8} = \mathbb{R}_+^*$. De plus, f_8 y est dérivable et pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_8}$,

$$\begin{aligned} f_8'(x) &= e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3} \cos(\sqrt{x}) + e^{-1/x^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (-1) \sin(\sqrt{x}) \\ &= e^{-1/x^2} \left(\frac{2}{x^3} \cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) \right) \end{aligned}$$

9. f_9 est définie en un réel x strictement positif si et seulement si $1 - \ln(x) \geq 0$, c'est à dire si et seulement si $x \in \mathcal{D}_{f_9} =]0, e[$.

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité, f_9 est dérivable au moins sur $]0, e[$ (sans rien dire de ce qu'il se passe en e). Pour tout $x \in]0, e[$,

$$f_9'(x) = \frac{-1}{x} \frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(x)}} \cos(e^x) - \sqrt{1 - \ln(x)} e^x \sin(e^x)$$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{1-e^x}{1+e^x} \right|$ est bien défini et est strictement positif si et seulement si $x \neq 0$.
Donc $D_{f_{10}} = \mathbb{R}^*$. f_{10} est dérivable sur cet ensemble et pour tout x réel non-nul, on a :

$$\begin{aligned} f'_{10}(x) &= \frac{-e^x(1+e^x) - (1-e^x)e^x}{\frac{(1+e^x)^2}{1-e^x}} \\ &= \frac{-2e^x}{(1+e^x)(1-e^x)} \end{aligned}$$

Solution 22 –

1. Pour tout x assez grand,

$$\frac{x+2}{x^2 \ln x - x} = \frac{x}{x^2 \ln(x)} \times \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x \ln(x)}} = \frac{1}{x \ln(x)} \times \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x \ln(x)}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x \ln(x)}} = 1$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2 \ln x - x} = 0.$$

2. Pour tout x assez grand,

$$\frac{e^{2x}+1}{e^x-3} = e^x \times \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{3}{e^x}}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x-3} = +\infty.$$

3. Pour tout $x > 1$ réel,

$$\frac{e^x+2}{x^8-1} = \frac{e^x}{x^8} \times \frac{1 + \frac{2}{e^x}}{1 - \frac{1}{x^8}}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^8} = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+2}{x^8-1} = +\infty.$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ (par continuité de $\cos$ en 0), donc par composition de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1/x) = 1.$$

5. Pour tout x réel positif, $\frac{3x+2}{x+1} = 3 \times \frac{1 + \frac{2}{3x}}{1 + \frac{1}{x}}$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{3x+2}{x+1}\right) = e^3.$$

6. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \exp\left(\frac{3x+2}{x+1}\right) = +\infty.$$

7. Pour tout x assez grand,

$$\frac{\ln(x^2+1)}{2 \ln x} = \frac{\ln(x^2(1 + \frac{1}{x^2}))}{\ln(x^2)} = \frac{\ln(x^2) + \ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\ln(x^2)} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\ln(x^2)}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2 \ln x} = 1.$$

8. Si $n = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + \ln(x)}{1 + x^3} \right)^n = 1$.

Si $n \neq 0$, Pour $x > 0$ proche de 0,

$$\frac{x^2 + \ln(x)}{1 + x^3} = \ln(x) \times \frac{1 + \frac{x^2}{\ln(x)}}{1 + x^3},$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \ln(x)}{1 + x^3} = -\infty$

Ainsi, si n est pair, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + \ln(x)}{1 + x^3} \right)^n = +\infty$ et si n est impair,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + \ln(x)}{1 + x^3} \right)^n = -\infty.$$

9. Pour tout x réel assez grand,

$$\frac{x+3}{\ln(x)+\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\frac{3}{x}+1}{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}+1} = \sqrt{x} \times \frac{\frac{3}{x}+1}{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}+1}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\ln x + \sqrt{x}} = +\infty.$$

10. Pour tout x réel strictement positif,

$$\frac{\ln(2^x)}{x+1} = \frac{x \ln(2)}{x+1} = \frac{\ln(2)}{1+\frac{1}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^x)}{x+1} = \ln(2).$$

11. Pour tout x réel strictement positif, $x^x = e^{x \ln(x)}$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$ par continuité de exp en 0.

12. Pour tout x réel strictement positif,

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

D'après les résultats sur les limites classiques, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Par continuité de

exp, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = e^1 = e$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e.$$

13. Pour tout x réel strictement positif,

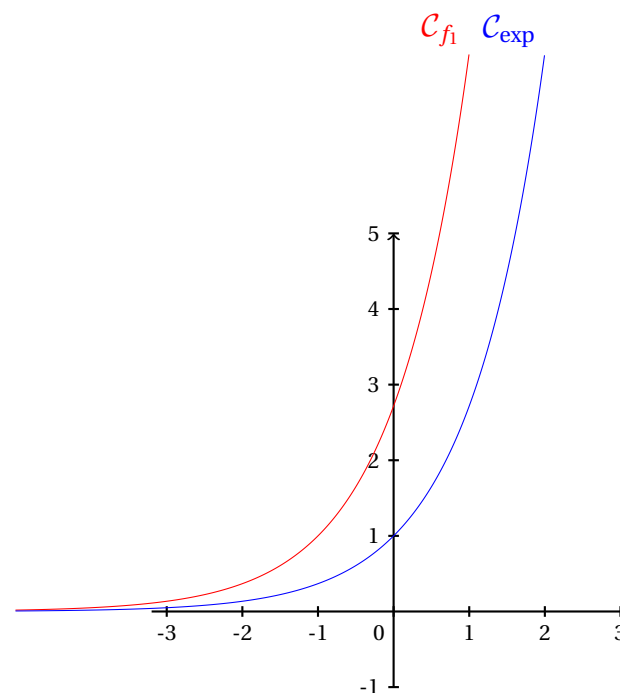
$$\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \frac{\exp(x^2 \ln(x))}{\exp(x^x \ln(x))} = \exp(\ln(x) x^2 (1 - x^{x-2}))$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x-2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) x^2 (1 - x^{x-2}) = -\infty$. Finalement,

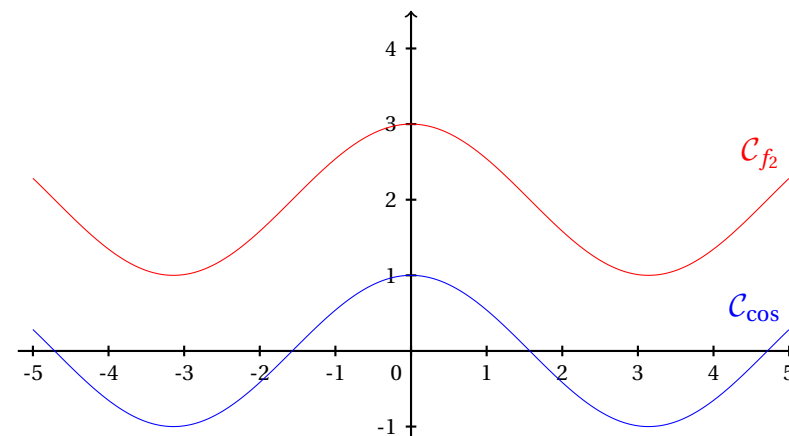
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.$$

Solution 23 –

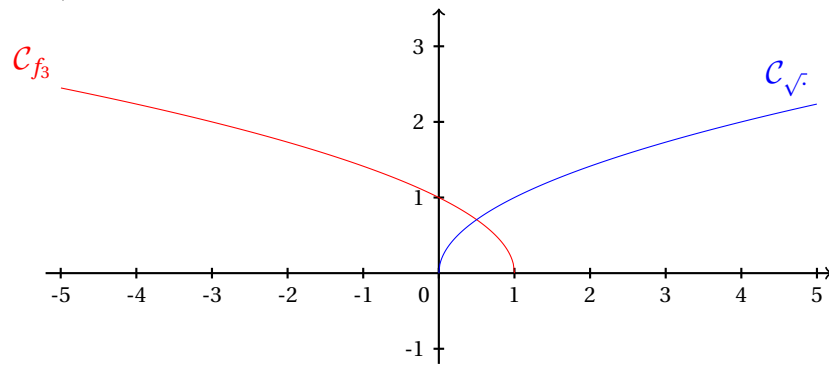
1. Translation de vecteur $-\vec{i}$ à partir de la courbe représentative de exp.



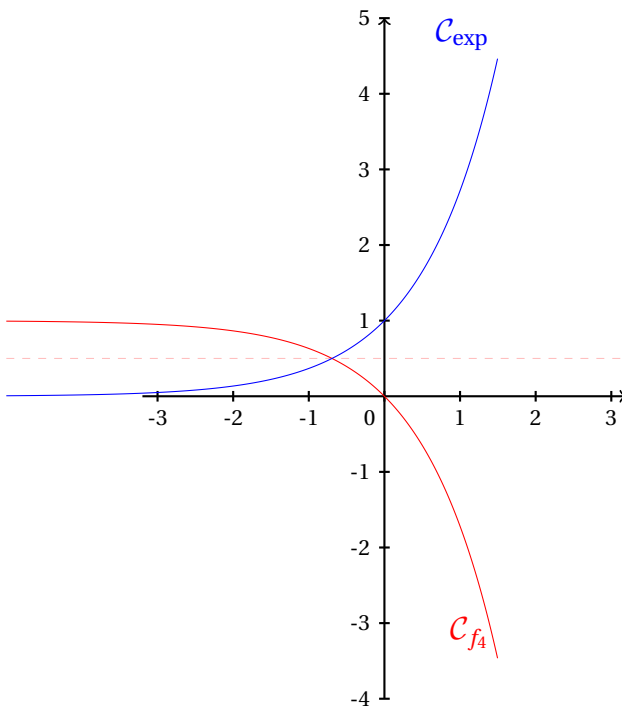
2. Translation de vecteur $2\vec{j}$ à partir de la courbe représentative de cos.



3. Symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ à partir de la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$.

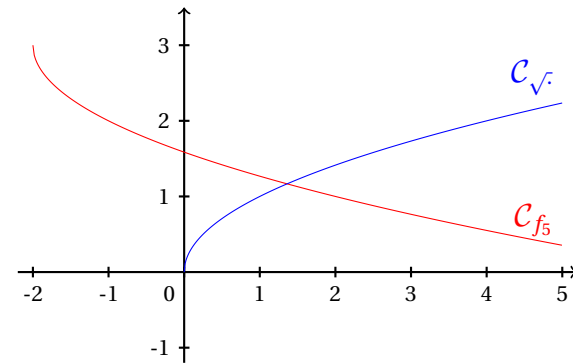


4. Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ à partir de la courbe représentative de $\exp$.

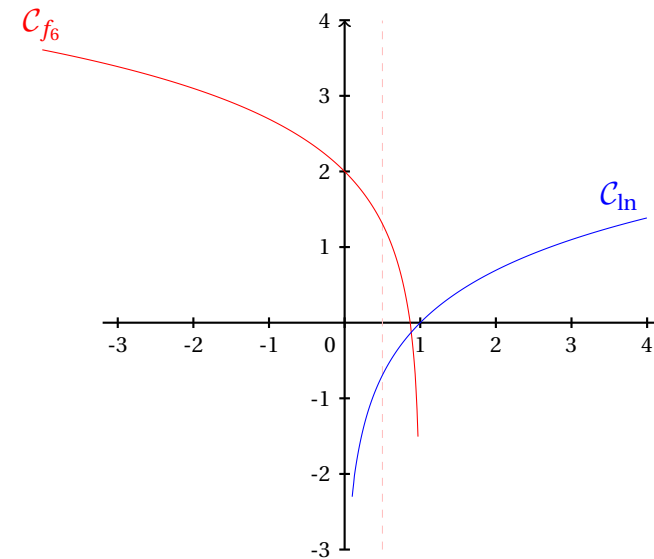


5. A partir de la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$, translation de vecteur $-2\vec{i}$ puis symé-

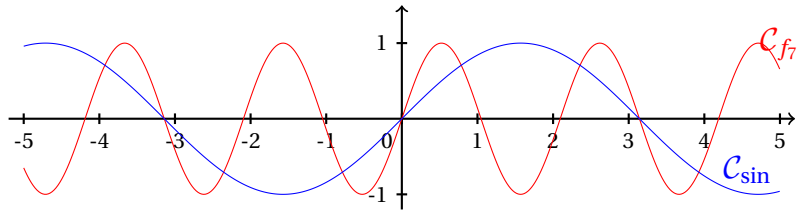
- trie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$



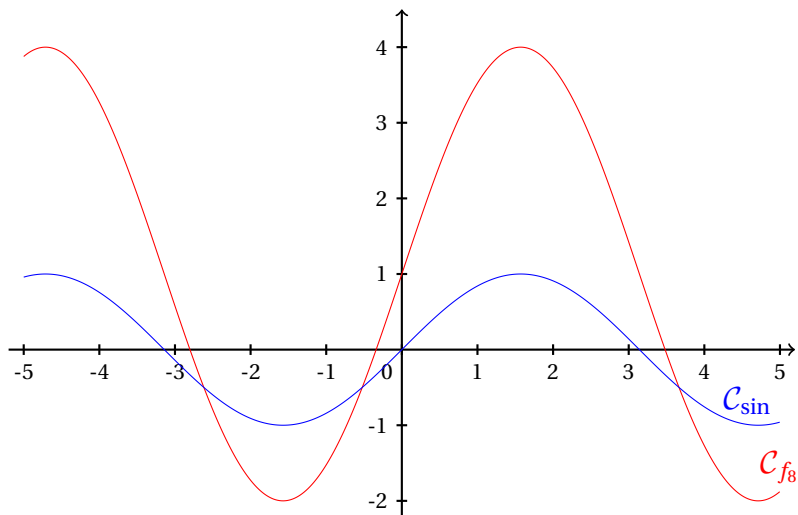
6. A partir de la courbe représentative de $\ln$, symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ puis translation de vecteur $2\vec{j}$.



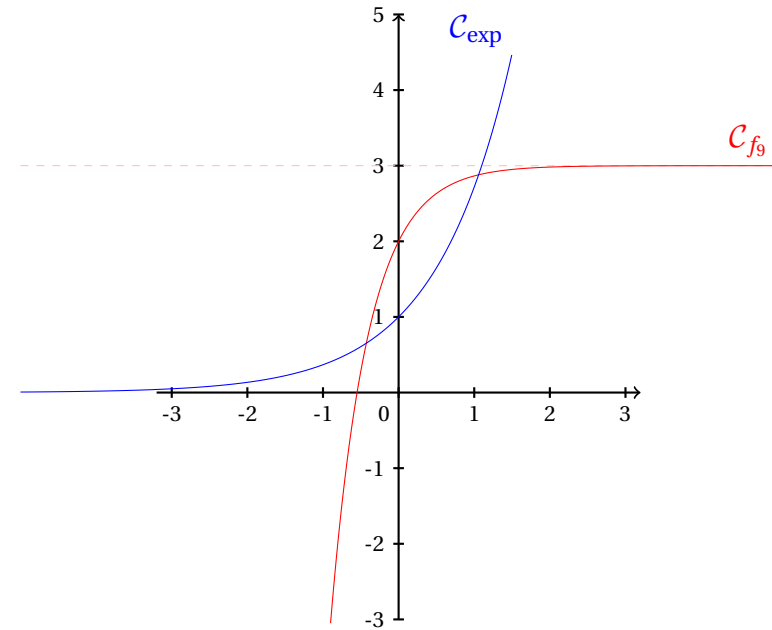
7. A partir de la courbe représentative de $\sin$, affinité orthogonale de rapport $\frac{1}{3}$ par rapport à l'axe des ordonnées.



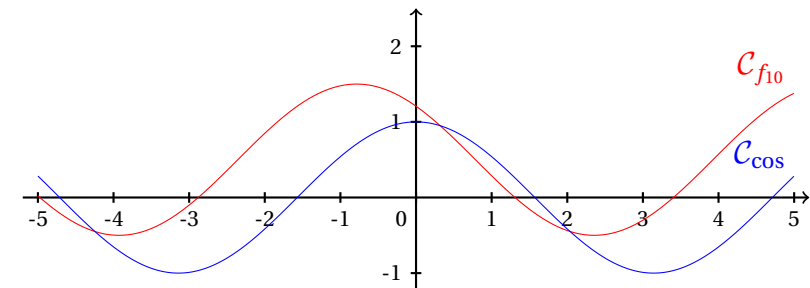
8. A partir de la courbe représentative de $\sin$, affinité orthogonale de rapport 3 par rapport à l'axe des abscisses puis translation de vecteur $\vec{j}$.



9. A partir de la courbe représentative de $\exp$, affinité orthogonale de rapport $-\frac{1}{2}$ par rapport à l'axe des abscisses puis symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$,



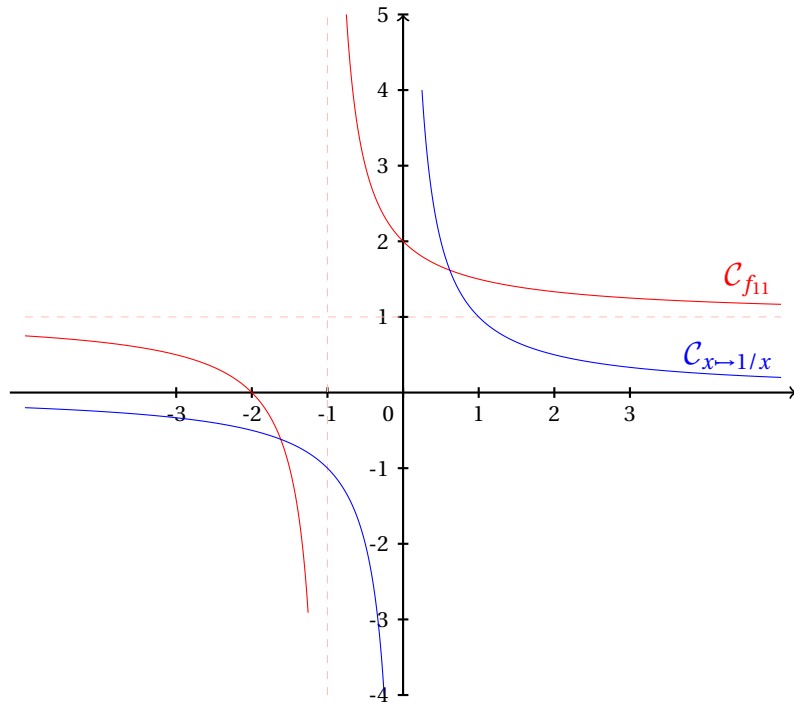
10. A partir de la courbe représentative de $\cos$, on effectue une translation de vecteur $-\frac{\pi}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.



11. Pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}.$$

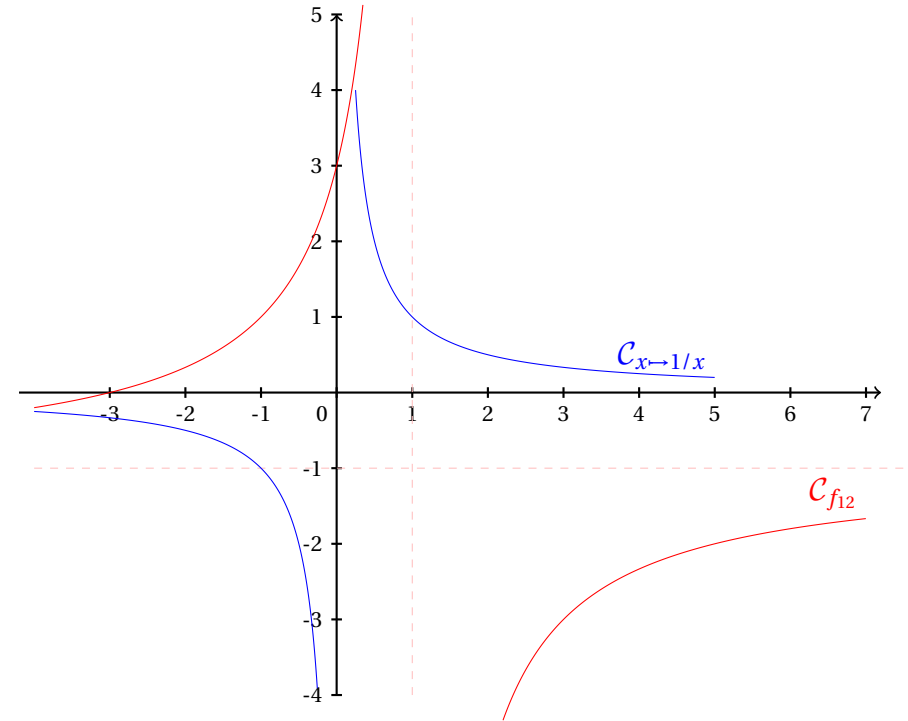
Ainsi, à partir de la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x}$, on effectue une translation de vecteur $-\vec{i} + \vec{j}$.



12. Pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = -\frac{-3-x}{1-x} = -\frac{-4+1-x}{1-x} = \frac{4}{1-x} - 1.$$

A partir de la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport 4 puis translation de vecteur $\vec{-j}$.



Solution 24 –

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, on calcule sa dérivée g' puis on montre que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = e^x + 1.$$

Ici, le signe est immédiat puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc

$$g'(x) = e^x + 1 > 0 + 1 = 1 > 0.$$

Ainsi la fonction g est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

- (b) On a :

$$g(0) = e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0.$$

Alors puisque la fonction g est croissante et que $g(0) = 0$, on en déduit que $g(x)$ est négatif pour $x \in]-\infty, 0]$ et positif pour $x \in [0, +\infty[$.

2. (a) Pour la limite en $+\infty$, on utilise les résultats de croissances comparées. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- (b) On commence par calculer l'écart entre $f(x)$ et $y = x + 1$, avant de montrer que cet écart tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$f(x) - y = x + 1 - \frac{x}{e^x} - (x + 1) = -\frac{x}{e^x}$$

Or on a déjà calculé la limite de cet écart à la question précédente : par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0.$$

Donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

- (c) Pour la limite en $-\infty$, les résultats classiques donnent une forme indéterminée. On réécrit donc la fonction afin de lever l'indétermination :

$$x + 1 - \frac{x}{e^x} = x \times \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x}\right).$$

Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^x} = -\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x} = -\infty.$$

Donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction polynomiale (donc dérivable sur $\mathbb{R}$) et d'un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On cherche la dérivée de la fonction f .

f est de la forme $x \mapsto x + 1 - \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$, alors

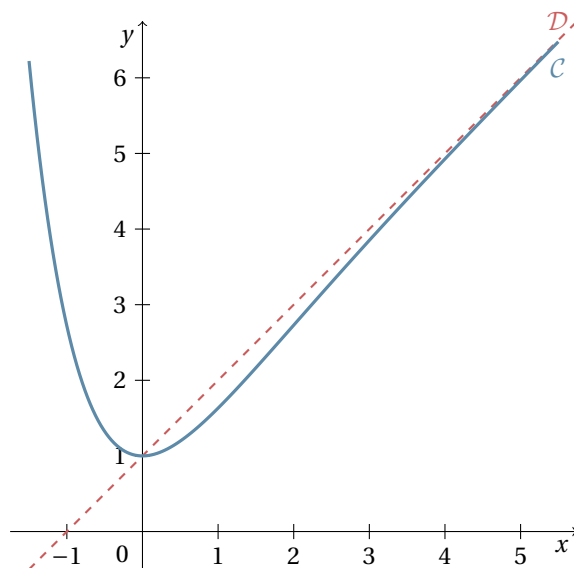
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 1 - \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = 1 - \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = 1 - \frac{1-x}{e^x} \\ &= \frac{e^x}{e^x} + \frac{x-1}{e^x} = \frac{e^x + x - 1}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}. \end{aligned}$$

Ainsi on a bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.

- (b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Grâce au tableau de signe de la fonction g établi dans la question 1. et parce que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, on peut établir le tableau de signe de f' et avec lui, le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
e^x	+		+
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Plus précisément, f est de la forme $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u : x \mapsto$ et $v : x \mapsto$.
5. La courbe admet une asymptote d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$. Elle possède aussi un minimum en $(0, 1)$.
On peut alors tracer l'allure de la courbe.



Solution 25 –

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction polynomiale et d'un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le quotient ne s'annule pas. Posons $u : x \mapsto 1 + e^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $u'(x) = e^x$. Ainsi,

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} + 1 = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x + 1 + 2e^x + e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2}.$$

La fonction f' ainsi obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Posons $u : x \mapsto 1 + e^x + e^{2x}$ et $v : x \mapsto e(1 + e^x)^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $u'(x) = e^x + 2e^{2x} = e^x(1 + 2e^x)$ et $v'(x) = 2e^x(1 + e^x)$, alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x(1+2e^x) \times (1+e^x)^2 - (1+e^x+e^{2x}) \times 2e^x(1+e^x)}{\left((1+e^x)^2\right)^2} \\ &= \frac{e^x(1+e^x)\left((1+2e^x)(1+e^x) - 2(1+e^x+e^{2x})\right)}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(1+e^x+2e^x+2e^{2x}-2-2e^x-2e^{2x})}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

Ainsi on a bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

- (b) La convexité de la fonction s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde. Comme une exponentielle est toujours positive, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $1 + e^x > 1 > 0$ donc $(1 + e^x)^3 > 0$. Il me reste à étudier le signe de $(e^x - 1)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0.$$

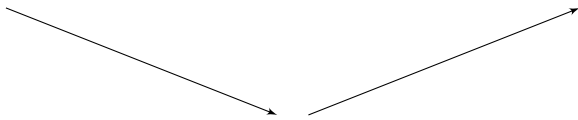
Ainsi on en déduit que :

- f est concave sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, car f'' y est négative,
- f est convexe sur l'intervalle $[0, +\infty[$, car f'' y est positive.

La courbe $\mathcal{C}$ admet bien un point d'inflexion, de coordonnées $(0, f(0)) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

$$\text{car } f(0) = \frac{1}{1+e^0} + 0 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Les variations de la fonction f' s'obtiennent en étudiant le signe de la dérivée f'' . On a déjà étudié le signe de f'' . On peut directement établir le tableau de signe de f'' et le tableau de variation de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f'				

On évalue f' en $x = 0$: $f'(0) = \frac{1 + e^0 + e^{2 \times 0}}{(1 + e^0)^2} = \frac{1 + 1 + 1}{(1 + 1)^2} = \frac{3}{4}$.

On retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé. En outre, il s'agit du minimum de la fonction f' et ce minimum est positif. On en conclut donc que la fonction f' est toujours strictement positive et donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) On rappelle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Alors

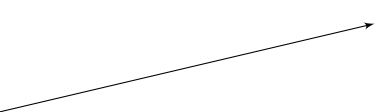
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} + x = +\infty.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} + x = -\infty.$$

(b) On connaît les limites de f et on sait que la fonction est strictement croissante. On dresse alors aisément le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$



3. (a) On commence par calculer la différence pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x = \frac{1}{1 + e^x} + x - x = \frac{1}{1 + e^x}$.

Or on a déjà calculé cette limite en $+\infty$ à la question 2.a) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ se réduit au voisinage de $+\infty$: la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(b) On raisonne de la même manière qu'à la question précédente.

On commence par calculer la différence : $f(x) - (x + 1) = \frac{1}{1 + e^x} + x - x - 1 = \frac{1}{1 + e^x} - 1$. Or on a déjà calculé la limite de $\frac{1}{1 + e^x}$ en $-\infty$ à la question 2.a). Alors par somme,

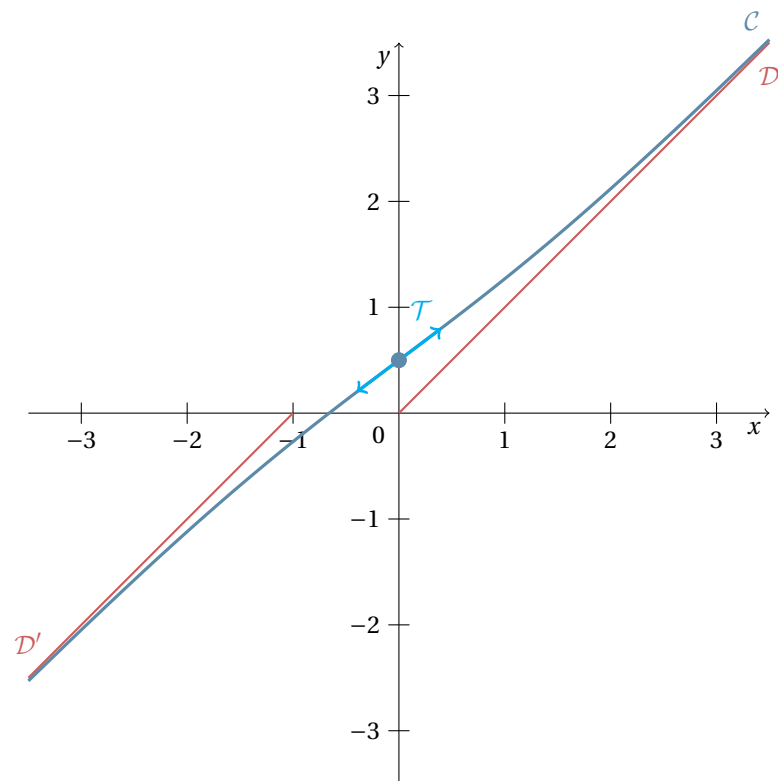
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x + 1$ se réduit au voisinage de $-\infty$: la droite $\mathcal{D}'$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

(c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$. On connaît déjà $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{3}{4}$. Ainsi l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

(d) Voici le graphe des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$.

**Solution 26 –**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $e^x - 1 > 0 \iff x > 0$, donc $(e^x - 1)/x > 0 \iff x \neq 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x) = (e^x - 1)/x$ est dérivable. Ainsi, comme $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que $f = \ln \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = e^x(x - 1 + e^{-x})/x^2 = e^x h(x)/x^2$, puis $f'(x) = e^x h(x)/(x^2 g(x))$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) > 0$, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$, donc le signe de f' est celui de h .
3. h est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - e^{-x}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $h'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$, donc h est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que h atteint son minimum en 0, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) \geq 0$.
4. D'après les deux questions précédentes, f est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

et

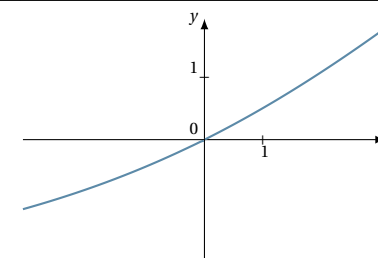
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x / x = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Par ailleurs, puisque $\exp$ est dérivable en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

En résumé,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

**Solution 27 –** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{2 + \cos(-x)}{-3 + \cos(-x)} = \frac{2 + \cos(x)}{-3 + \cos(x)} = f(x)$$

donc f est paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 2\pi) = \frac{2 + \cos(x + 2\pi)}{-3 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{2 + \cos(x)}{-3 + \cos(x)} = f(x)$$

donc f est 2π périodique. On va donc réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$. f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$,

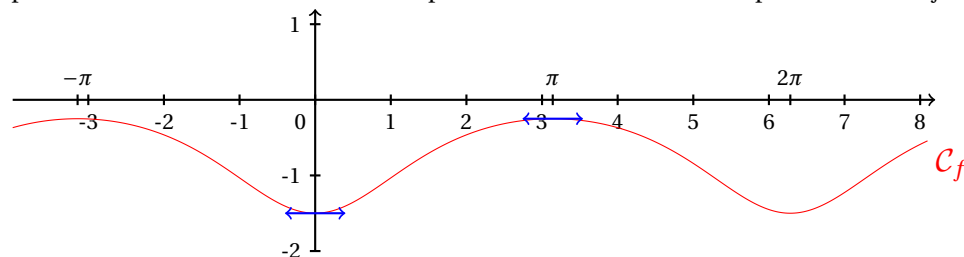
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin(x)(3 + \cos(x)) - (2 + \cos(x))(-\sin(x))}{(-3 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{5 \sin(x)}{(-3 + \cos(x))^2} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes de f' et les variations de f :

x	0	π	
$f'(x)$	0	+	0
f	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$

On notera en particulier que f admet des tangentes horizontales aux points d'abscisse 0 et π .

On peut alors représenter le graphe de f entre 0 et π . On effectue une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir la représentation sur $[-\pi, \pi]$. Enfin, on reporte cette courbe par des translations de vecteur $2k\pi \vec{i}$ pour obtenir tout la courbe représentative de f .



Solution 28 – 1. Domaine de définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4 > 0$, donc $\sqrt{x^2 + 4}$ est bien défini sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas.

On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Réduction du domaine d'étude

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = -x + \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + 4}} = -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) = f(x).$$

Donc f est impaire.

On va donc restreindre l'étude de f à $D = \mathbb{R}_+$ et l'on complètera la courbe obtenue par symétrie par rapport à O .

f ne semble pas admettre de période.

3. Continuité et limite

Par somme, quotients, et compositions de fonctions continues, f est continue sur D .

Pour tout $x \in D$,

$$f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = 1.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. Dérivabilité et dérivée Par somme, quotients, et compositions de fonctions dérivables, f est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}}}{x^2 + 4} \\ &= 1 + \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4}(x^2 + 4)} \\ &= 1 + \frac{4}{(x^2 + 4)^{3/2}} \end{aligned}$$

On en déduit que $f'(0) = \frac{3}{2}$.

5. Variations et tableau de variations

Pour tout $x \in D$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur D . Le tableau de variation de f est :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	3/2	+
f	0	$+\infty$

(Notons que $f(0) = 0$.)

6. Tangentes et asymptotes

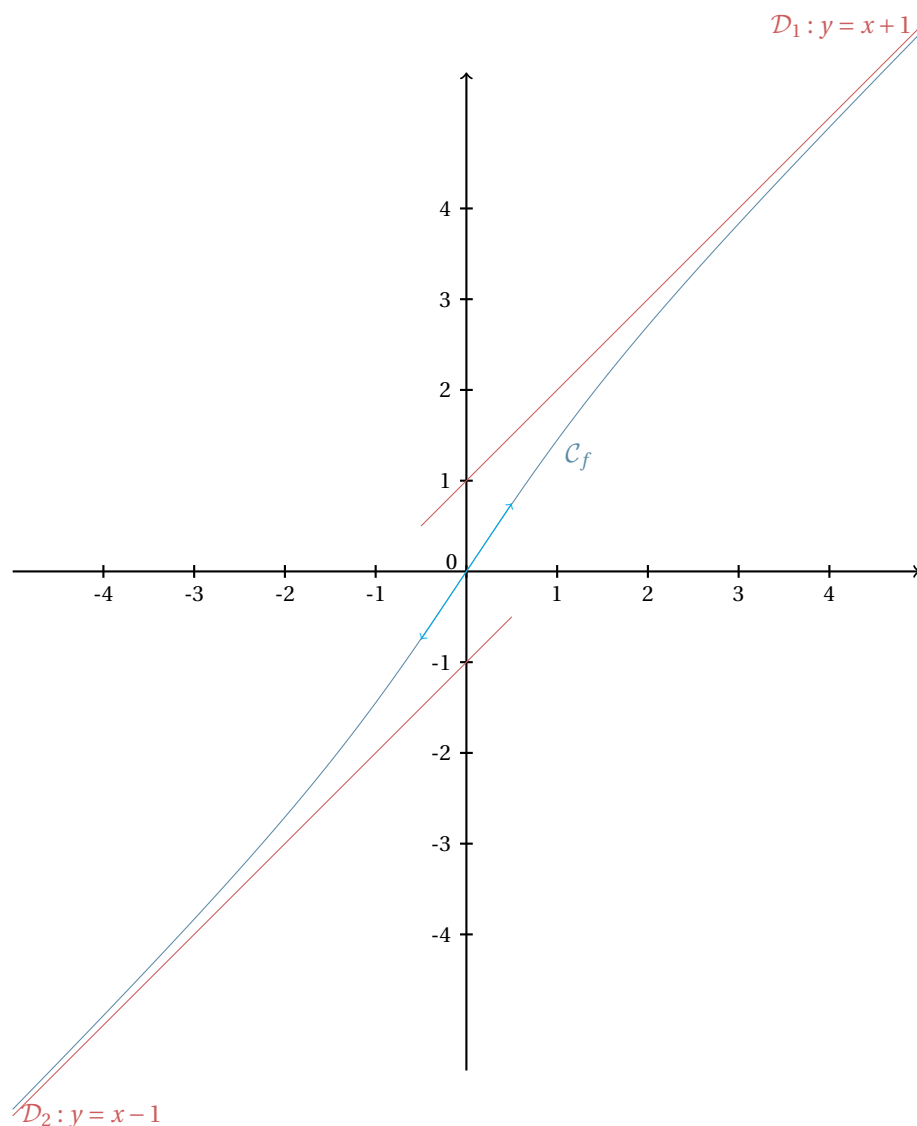
On a déjà calculé les valeurs de f et f' en 0. On sait donc que $\mathcal{C}_f$ a pour tangente en 0 la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

On remarque que pour tout $x \in D$,

$$f(x) - (x + 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $+\infty$.

7. Représentation graphique



Solution 29 –

1. $\sqrt{x^2 + 3x + k}$ est bien définie lorsque x est un réel tel que $x^2 + 3x + k \geq 0$.

Le discriminant de $x^2 + 3x + k$ est $\Delta_k = 9 - 4k$. On en déduit que

Si $k \geq \frac{9}{4}$, alors $\Delta_k \leq 0$ et $x^2 + 3x + k$ est toujours positif ou nul, donc $\mathcal{D}_k = \mathbb{R}$.

Si $k < \frac{9}{4}$, alors $\Delta_k > 0$ et $x^2 + 3x + k$ admet deux racines réelles

$$x_{1,k} = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4k}}{2} \quad x_{2,k} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4k}}{2}$$

On a alors $\mathcal{D}_k =]-\infty, x_{1,k}] \cup [x_{2,k}, +\infty[$.

2. Quelque soit k , $\mathcal{D}_k$ est bien symétrique par rapport à $\frac{-3}{2}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_k$,

$$\begin{aligned} f(-3-x) &= \sqrt{(-3-x)^2 + 3(-3-x) + k} \\ &= \sqrt{9 + 6x + x^2 - 9 - 3x + k} \\ &= \sqrt{x^2 + 3x + k} = f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que Γ_k est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-3}{2}$. On peut donc réduire l'étude de f_k à la partie de $\mathcal{D}_k$ à droite de $\frac{-3}{2}$. On en déduit que

Si $k \geq \frac{9}{4}$, $\mathcal{E}_k = [\frac{-3}{2}, +\infty[$.

Si $k < \frac{9}{4}$, $\mathcal{E}_k = [x_{2,k}, +\infty[$.

3. Les théorèmes classiques nous assurent que f_k est dérivable au moins lorsque $x^2 + 3x + k > 0$. On a donc

Si $k > \frac{9}{4}$, $\mathcal{A}_k = [\frac{-3}{2}, +\infty[$.

Si $k = \frac{9}{4}$, $\mathcal{A}_k = [\frac{-3}{2}, +\infty[$.

Si $k < \frac{9}{4}$, $\mathcal{A}_k =]x_{2,k}, +\infty[$.

4. Pour tout $x \in \mathcal{A}_k$,

$$f'_k(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + k}}.$$

On en déduit les trois tableaux de variations suivants :

Si $k > \frac{9}{4}$,

x	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	0	+
f_k	$f_k(-\frac{3}{2})$	$+\infty$

f_k admet dans ce cas une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{-3}{2}$.

Si $k = \frac{9}{4}$,

x	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	?	+
f_k	0	$+\infty$

Si $k < \frac{9}{4}$,

x	$x_{2,k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	?	+
f_k	0	$+\infty$

5. Pour tout $x \in \mathcal{A}_k$,

$$\begin{aligned}
 f_k(x) - x &= \sqrt{x^2 + 3x + k} - x \\
 (f_k(x) - x)(\sqrt{x^2 + 3x + k} + x) &= (\sqrt{x^2 + 3x + k} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + k} + x) \\
 (f_k(x) - x)(\sqrt{x^2 + 3x + k} + x) &= x^2 + 3x + k - x^2 \\
 f_k(x) - x &= \frac{3x + k}{\sqrt{x^2 + 3x + k} + x} \\
 &= \frac{3 + \frac{k}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{k}{x^2}} + 1}
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) - x = \frac{3}{2}$.

6. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) - (x + \frac{3}{2}) = 0$. Donc Γ_k admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x + \frac{3}{2}$.

7. Pour tout $x \in \mathcal{E}_k$,

$$f_k(x) = \sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + k}$$

Donc, en posant $c_k = k - \frac{9}{4}$, on a bien $f_k(x) = \sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 + c_k}$ pour tout $x \in \mathcal{E}_k$.

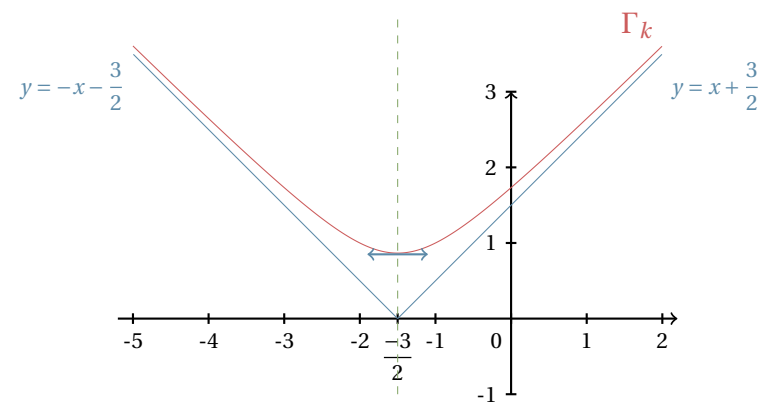
On en déduit que :

Si $k > \frac{9}{4}$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}_k$, $f_k(x) > (x + \frac{3}{2})$, donc Γ_k est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

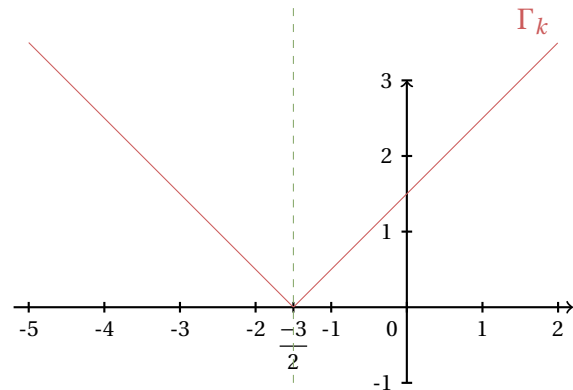
Si $k = \frac{9}{4}$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}_k$, $f_k(x) = (x + \frac{3}{2})$, donc Γ_k est confondue avec son asymptote en $+\infty$.

Si $k < \frac{9}{4}$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}_k$, $f_k(x) < (x + \frac{3}{2})$, donc Γ_k est en-dessous de son asymptote en $+\infty$.

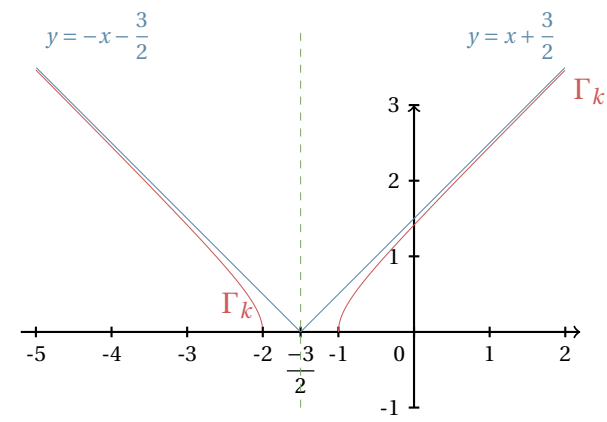
8. • Si $k > \frac{9}{4}$,



• Si $k = \frac{9}{4}$,



• Si $k < \frac{9}{4}$,



- ♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.
- ♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!