EXERCICES — CHAPITRE 4

Exercice 1 (♣) – Soit a un nombre complexe différent de i . Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{2-i}{3i}, \quad z_2 = \frac{3-2i}{5-3i}, \quad z_3 = (3+2i)(2+i)^2, \quad z_4 = (a+i)^2, \quad z_5 = \frac{a+i}{a-i}.$$

Exercice 2 (♣) – Déterminer les nombres complexes z tels que $Z = \frac{2z-4}{z-i}$ soit réel.

Exercice 3 (♠) – Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Montrer que l'égalité $\Re e(z_1 z_2) = \Re e(z_1)\Re e(z_2)$ a lieu si, et seulement si, l'un au moins des deux nombres z_1 et z_2 est réel.

Exercice 4 (♦) –

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes

$$\begin{aligned} z_0 &= -2\sqrt{3} + 6i & z_1 &= 1 + i & z_2 &= 1 - i & z_3 &= 1 + i\sqrt{3} \\ z_4 &= -\sqrt{6} + i\sqrt{2} & z_5 &= -i & z_6 &= (1 - \sqrt{2})e^{i\pi/3} & z_7 &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \end{aligned}$$

$$z_8 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^4 \qquad z_9 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2. Soit $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = 1 + i \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

3. Donner la forme algébrique des nombres complexes $(1+i)^{2019}$, $(z_7)^{20}$ et i^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer les nombres entiers $n \geq 0$ tels que $\omega_n = (1 + i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel.

Exercice 5 (♦) – Soient α et β deux nombres réels. Déterminer pour quelles valeurs de α ou β les nombres ci-dessous sont correctement définis puis calculer leur module et en déterminer un argument.

$$z_1 = 1 + e^{i\alpha}, \quad z_2 = \frac{1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$$

Exercice 6 (♠) – Soient u un nombre complexe non nul. Déterminer le module et un argument de $u + i\bar{u}$.

Exercice 7 (♦) –

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2 + 2i}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

2. Résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue x réelle,

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin(x) = 0.$$

Exercice 8 (♣) – Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1): 2i\bar{z} = 1 + i, \quad (E_2): 2z + 3\bar{z} = 3 - i.$$

Exercice 9 (♣) – Déterminer les nombres complexes z tels que

$$\text{a) } z(2\bar{z} + 1) = 1, \quad \text{b) } |z^2| = |z|, \quad \text{c) } \frac{z + 4i}{5z - 3} \in \mathbb{R}, \quad \text{d) } \frac{z + 4i}{5z - 3} \in i\mathbb{R}$$

Exercice 10 (♣) –

1. On considère le nombre complexe $z = 3 - 2i$. Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D d'affixes respectives $z, \bar{z}, -z$ et $-\bar{z}$.

2. Placer dans le plan complexe les points E, F, G, H d'affixes respectives

$$z_E = 2e^{i\pi/3}, \quad z_F = -e^{i\pi/6}, \quad z_G = -z_E \times z_F, \quad z_H = \frac{-z_F}{z_E}$$

Exercice 11 (♥) – Déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie

$$\begin{aligned} 1. \quad & |z - i| = |z + i| & 2. \quad & \frac{|z - 3 + i|}{|z + 5 - 2i|} = 1 \\ 3. \quad & |(1 + i)z - 2i| = 2 & 4. \quad & |3 + iz| = |3 - iz| \end{aligned}$$

Exercice 12 (♠) – Quel est l'ensemble E des complexes z tels que z, z^2 et $1 - z$ aient le même module ?

Exercice 13 (♣) – Soient z et z' deux nombres complexes distincts **de module 1**.

1. Montrer que $Z = \frac{z^2 - 1}{z}$ est un imaginaire pur.
 2. Montrer que $Z' = \frac{zz' - 1}{z' - z}$ est un nombre réel.

Exercice 14 (♠) –

- Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Démontrer l'égalité $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.
- Interpréter géométriquement cette égalité pour en déduire une propriété remarquable du parallélogramme. Que retrouve-t-on dans le cas d'un rectangle?
- Déterminer une formule permettant de calculer la longueur de la médiane d'un triangle lorsqu'on connaît la longueur de ses trois côtés.

Exercice 15 (♠) – Démontrer, pour tous nombres complexes z et z' , les inégalités suivantes et caractériser les cas d'égalité :

- $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$,
- $|\Re(z)| + |\Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.

Exercice 16 (♠) – Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les n nombres complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$ tous non nuls pour que $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = |z_1 + z_2 + \dots + z_n|$.

Exercice 17 (♠) – Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

- $(1 + i)^n \in \mathbb{R}$.
- $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice 18 (♥) – On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- Déterminer la forme exponentielle de j .
- Calculer j^2 et j^3 (on donnera leur forme algébrique).
- Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
- Calculer la somme $1 + j + j^2 + j^3 + \dots + j^{2021}$.

Exercice 19 (♠) – On se propose dans cet exercice de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathbb{R}, f(z) = z$.
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z + z') = f(z) + f(z')$.
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z \times z') = f(z) \times f(z')$.

- Vérifier que les fonctions définies par $f(z) = z$ et $f(z) = \bar{z}$ sont solutions du problème.
- Réciproquement soit f une fonction du problème.
 - Démontrer que $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.
 - On suppose que $f(i) = i$. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}, f(z) = z$.
 - On suppose que $f(i) = -i$. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$.
- Qu'a-t-on démontré dans cet exercice?

Exercice 20 (♣) – Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

- $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$
- $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 21 (♥) –

- Calculer les racines carrées de $-18i, 1 - i, -\sqrt{3} + i, 3 - 4i, -5 - 12i$ et $(1 + i)^5$. On donnera, quand cela est possible, les solutions sous forme algébrique.
- Soit x un nombre réel. Déterminer les racines carrées de $4x + 2i(1 - x^2)$.
- Déterminer les racines cubiques de $4 + 4i\sqrt{3}$.
 - Déterminer les racines quatrièmes de $\frac{\sqrt{3} + i}{i - \sqrt{3}}$.
 - Déterminer les racines cinquièmes de $\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{\sqrt{3} - i}$.

Exercice 22 (♦) – Déterminer le module de $1 + \sqrt[3]{2}j + \sqrt[3]{4}j^2$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 23 (♥) – Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $(1 + i)z^2 + iz + (1 - i) = 0$
- $(1 + i)z^2 + (1 - i)z + 2(1 + i) = 0$
- $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0$
- $z^2 - (5 - 14i)z - (24 + 10i) = 0$
- $z^4 + (5i - 4)z^2 - 1 - 7i = 0$
- $1 + iz - z^2 - iz^3 = 0$.

Exercice 24 (♠) – Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants :

$$A) \begin{cases} ab = -24 - 10i \\ a + b = 5 - 14i, \end{cases} \quad \text{et} \quad B) \begin{cases} uv = 1 - 8i \\ u^2 + v^2 = -2 - 16i. \end{cases}$$

Exercice 25 (♣) – Soit ω un nombre complexe fixé. On considère l'équation du second degré

$$(E_\omega) : z^2 - (2 + i\omega)z + 2 + i\omega - \omega = 0.$$

- Résoudre (E_ω) .
- Pour quelle(s) valeur(s) de ω cette équation admet-elle deux racines complexes conjuguées?

Exercice 26 (♥) – Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

- $(E_1) \quad z^3 + 1 = 0$
- $(E_2) \quad z^4 - i = 0$
- $(E_3) \quad z^8 + 1 = 0$
- $(E_4) \quad z^3 = -(2 + i)^3$
- $(E_5) \quad z^n = (z + 1)^n$
- $(E_6) \quad \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^{2n} = 1$
- $(E_7) \quad (z^2 + 1)^7 = (z + i)^{14}$

Exercice 27 (♦) – On considère l'équation

$$(E) \quad z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0.$$

- Déterminer la solution réelle x de (E) .
- Déterminer la solution imaginaire pure w de (E) .
- Déterminer des nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = (z-x)(z-w)(z^2 + az + b)$$

- Résoudre (E) .

Exercice 28 (♠) – Soit $a \in \mathbb{U}$. On note $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont $(1+z_1)^n, \dots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice 29 (♥) – *Caractériser géométriquement une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, c'est déterminer si c'est une translation, une symétrie... et préciser ses invariants (vecteur, centre, rapport...).*

- Caractériser géométriquement :

(a) $z \mapsto iz + 1.$

(b) $z \mapsto 3z - 2.$

(c) $z \mapsto z + 3 - 5i.$

(d) $z \mapsto 2(1+i)z - 7 - 4i.$

- Donner une expression explicite de la rotation de centre $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!