EXERCICES — CHAPITRE 4

Solution 1 –

1. $z_1 = \dfrac{(2-i)i}{3i^2} = \dfrac{2i+1}{-3} = \boxed{\dfrac{-1}{3} + i\dfrac{-2}{3}.}$
2. $z_2 = \dfrac{(3-2i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \dfrac{15+9i-10i+6}{5^2+3^2} = \boxed{\dfrac{21}{34} + i\dfrac{-1}{34}.}$
3. $z_3 = (3+2i)(4+4i-1) = (3+2i)(3+4i) = 9+12i+6i-8 = \boxed{1+18i}.$
4. On note a sous forme algébrique $x+iy$ avec x et y réels. Alors
$$\begin{aligned} z_4 &= (x+i(y+1))^2 \\ &= x^2 + 2xi(y+1) - (y+1)^2 \end{aligned}$$
Donc $\boxed{z_4 = (x^2-(y+1)^2) + i(2x(y+1))}$.
5. En reprenant la forme algébrique de a, on a
$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} \\ &= \frac{(x+i(y+1))(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))} \\ &= \frac{x^2+ix(y+1)-ix(y-1)+(y+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$
$$z_5 = \boxed{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}.}$$

Solution 2 – Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. On suppose que $(a,b) \neq (0,1)$ de sorte que $Z = \dfrac{2z-4}{z-i}$ soit bien défini. On a alors :
$$\begin{aligned} Z = \frac{2z-4}{z-i} = \frac{2(a+ib)-4}{a+ib-i} = \frac{(2a-4)+2ib}{a+i(b-1)} &= \frac{\big((2a-4)+2ib\big)\big(a-i(b-1)\big)}{a^2+(b-1)^2} \\ &= \frac{\big(a(2a-4)+2b(b-1)\big)+i\big(2ab-(2a-4)(b-1)\big)}{a^2+(b-1)^2} \\ &= \frac{\big(a(2a-4)+2b(b-1)\big)+i\big(2a+4b-4\big)}{a^2+(b-1)^2} \end{aligned}$$
Dès lors,
$$Z \in \mathbb{R} \iff a+2b = 2 \text{ avec } a \neq 0$$
Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z tels que $Z \in \mathbb{R}$ est
$$\left\{a + i\left(1-\frac{a}{2}\right) \mid a \neq 0\right\}$$

Solution 3 – Soient x_1, x_2, y_1, y_2 des réels tels que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.
$$\begin{aligned} \Re e(z_1z_2) = \Re e(z_1)\Re e(z_2) &\Leftrightarrow \Re e((x_1+iy_1)(x_2+iy_2)) = x_1x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 - y_1y_2 = x_1x_2 \\ &\Leftrightarrow -y_1y_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 = 0 \text{ Ou } y_2 = 0. \end{aligned}$$
$\Re e(z_1z_2) = \Re e(z_1)\Re e(z_2)$ si, et seulement si, l'un au moins des deux nombres z_1 et z_2 est réel.

Solution 4 –

1. (a) $|z_0| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+6^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = 4\sqrt{3}$. Donc,
$$\begin{aligned} z_0 &= 4\sqrt{3}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} + i\frac{6}{4\sqrt{3}}\right) \\ &= 4\sqrt{3}\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$
On cherche θ un réel tel que $\cos(\theta) = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le réel $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ convient.
Ainsi, $\boxed{z_0 = 4\sqrt{3}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right) = 4\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$.

(b) $z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ avec ρ_1 et θ_1 des réels tels que :

$$\begin{cases} \rho_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ convient, donc $\boxed{z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

(c) $z_2 = \overline{z_1}$, donc $\boxed{z_2 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))}$.

(d) $z_3 = \rho_3(\cos(\theta_3) + i\sin(\theta_3))$ avec ρ_3 et θ_3 des réels tels que :

$$\begin{cases} \rho_3 = \sqrt{1+3} = 2 \\ \cos(\theta_3) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta_3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\theta_3 = \dfrac{\pi}{3}$ convient, donc $\boxed{z_3 = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))}$.

(e) $z_4 = \rho_4(\cos(\theta_4) + i\sin(\theta_4))$ avec ρ_4 et θ_4 des réels tels que :

$$\begin{cases} \rho_4 = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2} \\ \cos(\theta_4) = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\theta_4 = \dfrac{5\pi}{6}$ convient, donc $\boxed{z_4 = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))}$.

(f) $\boxed{z_5 = (\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})).}$

(g) On peut-être tenté de penser que z_6 est déjà présenté sous forme exponentielle, ce qui n'est pas le cas car le réel en facteur est négatif. On utilise alors la technique de la multiplication par $(-1)\,e^{i\pi}$ (qui vaut 1).

$$z_6 = (1-\sqrt{2})(-1)\,e^{i\pi}\,e^{i\frac{\pi}{3}} = (\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Il s'agit alors bien de la forme exponentielle de z_6, que l'on réécrit sous forme trigonométrique : $\boxed{z_6 = (\sqrt{2}-1)(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})).}$

(h) $z_7 = \dfrac{z_3}{z_2} = \dfrac{\rho_3}{\rho_2}\,e^{i(\theta_3-\theta_2)}$. Donc

$$\boxed{z_7 = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})\right).}$$

(i) $z_8 = z_7^4 = 4\,e^{i\frac{28\pi}{12}} = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où $\boxed{z_8 = 4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})).}$

(j) La forme présentée ici n'est pas une forme trigonométrique à cause du signe $-$. On va faire un usage subtil des formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} z_9 &= \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

Il s'agit bien là de la forme trigonométrique.

2.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sin(\theta)}(\sin(\theta) + i\cos(\theta)) \\ &= \frac{1}{\sin(\theta)}(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)) \end{aligned}$$

Attention, on a obtenu la forme trigonométrique uniquement si le coefficient $\dfrac{1}{\sin(\theta)}$ est positif.

Si $\theta \in]0;\pi[$, alors le module de Z est $\dfrac{1}{\sin(\theta)}$ et $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ en est un argument.

Si $\theta \in]-\pi;0[$, alors le module de Z est $\dfrac{1}{|\sin(\theta)|}$ et $\dfrac{\pi}{2} - \theta + \pi = \dfrac{3\pi}{2} - \theta$ en est un argument.

3. $(1+i)^{2019} = z_1^{2019} = \rho_1^{2019}\,e^{2019i\theta_1} = 2^{1009}\sqrt{2}\,e^{i\frac{2019\pi}{4}} = 2^{1009}\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$. D'où

$(1+i)^{2019} = 2^{1009}\sqrt{2}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \boxed{-2^{1009} + i2^{1009}.}$

Pour z_7^{20},

$$\begin{aligned} z_7^{20} &= \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} \\ &= \sqrt{2}^{20}\,e^{i\frac{7\times 20\pi}{12}} \\ &= 2^10\,e^{i\frac{15\pi}{3}} \\ &= 1024\,e^{i\frac{3\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z_7^{20} = -1024}$ car $e^{i\pi} = -1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} i^n &= \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^n \\ &= e^{\frac{ni\pi}{2}} \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Il s'agit de la forme algébrique de i^n.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\omega_n = z_3^n$, donc un argument de ω_n est $\dfrac{n\pi}{3}$.
ω_n est réel si et seulement si son argument est congru à π modulo 2π, c'est à dire $\boxed{\text{si et seulement si } n \in \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$

Solution 5 –

1. z_1 est bien défini quelque soient les valeurs de α et β.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + e^{i\alpha} \\ &= 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}}{2} \\ &= 2\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

par parité de cosinus. Le module de z_1 est donc $2\left|\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|$.
Si $\alpha \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi[$, alors $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$ et $\arg(z_1) \equiv \dfrac{\alpha}{2} [2\pi]$.
Si $\alpha \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 4k\pi; 3\pi + 4k\pi[$, alors $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) < 0$ et $\arg(z_1) \equiv \dfrac{\alpha}{2} + \pi [2\pi]$.
Si $\alpha \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors $|z_1| = 0$ et z_1 n'a pas d'argument défini.

2. z_2 est bien défini lorsque $\cos(\alpha) \neq 1$ ou lorsque $\sin(\alpha) \neq 0$, c'est à dire lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) &= 1 - e^{i\alpha} \\ &= 2i\, e^{i\alpha/2} \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}}{2i} \\ &= 2i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha/2} \end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{2\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}}{2i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha/2}} = \frac{\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{i\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{-\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{i\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ainsi, le module de z_2 est $\left|\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right|$.
Si $\alpha \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi; \pi + 2k\pi[$, alors $\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} > 0$ et $\arg(z_2) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$
Si $\alpha \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi[$, alors $\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < 0$ et $\arg(z_2) \equiv -\dfrac{\pi}{2} [2\pi]$.
Si $\alpha \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors $|z_2| = 0$ et z_2 n'a pas d'argument défini.

3. z_3 est bien défini si et seulement si $1 + e^{i(\alpha+\beta)} \neq 0$. Or

$$\begin{aligned} 1 + e^{i(\alpha+\beta)} \neq 0 &\Leftrightarrow e^{i(\alpha+\beta)} \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \alpha + \beta \neq \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

Donc z_3 est bien défini si et seulement si $\alpha + \beta \notin \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas :

$$z_3 = \frac{2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{-(\alpha+\beta)}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}$$

$$z_3 = \frac{\cos\left(\frac{(\alpha-\beta)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{-(\alpha+\beta)}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

On remarque que z_3 est un réel (c'est le quotient de 2 cosinus). Donc son module est $\left|\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right|$.
Si $\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = 0$, z_3 n'a pas d'argument. Sinon, 0 est un argument de z_3 s'il est positif et π est un argument de z_3 dans le cas où celui-ci est négatif.

Solution 6 – On pose a et b réels tels que $u = a + ib$.

$$\begin{aligned} z &= u + i\overline{u} \\ &= (a + ib) + i(a - ib) \\ &= (a + b) + i(a + b) \end{aligned}$$

$|u| = \sqrt{(a+b)^2+(a+b)^2} = \sqrt{2}|a+b|$.
Si $a+b=0$, alors $z=0$ et n'a pas d'argument défini.
Sinon, notons θ l'argument de z appartenant à $]-\pi;\pi]$.

$$\cos(\theta) = \frac{(a+b)}{\sqrt{2}|a+b|}, \quad \sin(\theta) = \frac{(a+b)}{\sqrt{2}|a+b|}.$$

Si $a+b>0$, alors $|a+b| = a+b$ et θ vérifie $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Si $a+b<0$, alors $|a+b| = -(a+b)$ et θ vérifie $\cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Donc $\arg(z) \equiv \frac{-3\pi}{4}[2\pi]$.

Solution 7 –

1. On factorise $\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ par $\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{8}$.
   $\sqrt{6}+i\sqrt{2} = \sqrt{8}(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}+i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}) = \sqrt{8}(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} = \sqrt{8}(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}))$
   Donc $\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ a pour module $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et admet $\frac{\pi}{6}$ comme argument.
   En procédant de même, $2+2i = \sqrt{8}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})$
   Donc $2+2i$ a pour module $\sqrt{8}$ et admet $\frac{\pi}{4}$ comme argument. On détermine alors le quotient :
   $$\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i} = \frac{\sqrt{8}\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{8}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$$
   Donc $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i}$ est de module 1 et admet $-\frac{\pi}{12}$ comme argument.
   Déterminons désormais ses parties réelle et imaginaire.
   $$\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i} = \frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{1}{8}(2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2}-2\sqrt{6}))$$
   On en déduit que
   $$\cos(\frac{-\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin(\frac{-\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$
   On utilise enfin les formules trigonométriques concernant $\frac{\pi}{2}-x$:
   $$\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{12}) = \sin(\frac{-\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{12}) = \cos(\frac{-\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
   $$\cos(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
   $$\begin{aligned}(E) &\iff 4\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\sin(x)\right) = 0\\ &\iff 4\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin(x)\right) = 0\\ &\iff \sin\left(x-\frac{7\pi}{12}\right) = 0\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, x-\frac{7\pi}{12} = k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, x = k\pi+\frac{7\pi}{12}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{k\pi+\frac{7\pi}{12} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Solution 8 –

1. Soit z un complexe sous forme algébrique. Alors
   $$\begin{aligned}2i\overline{z} = 1+i &\iff \overline{2i\overline{z}} = \overline{1+i}\\ &\iff -2iz = 1-i\\ &\iff z = \frac{1-i}{-2i}\\ &\iff z = \frac{(1-i)i}{2}\\ &\iff z = \frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\end{aligned}$$
   (E_1) admet donc une unique solution : $\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$.
2. Soit $z = a+ib$ un complexe sous forme algébrique. Alors
   $$\begin{aligned}2z+3\overline{z} = 3-i &\iff 2(a+ib)+3(a-ib) = 3-i\\ &\iff 5a-ib = 3-i\\ &\iff 5a = 3 \text{ Et } -b = -1\\ &\iff a = \frac{3}{5} \text{ Et } b = 1\end{aligned}$$
   (E_2) admet donc une unique solution : $\frac{3}{5}+i$

Solution 9 –

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z\left(2\overline{z}+1\right) = 1 &\Leftrightarrow 2z\overline{z}+z = 1 \\ &\Leftrightarrow 2|z|^2 + z = 1 \\ &\Leftrightarrow z = 1-2|z|^2 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \quad \text{Et} \quad 2z^2+z-1=0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \quad \text{Et} \quad 2(z+1)(z-\frac{1}{2}) = 0 \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des solutions est $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \left|z^2\right| = |z| &\Leftrightarrow |z|^2 = |z| \\ &\Leftrightarrow |z|\,(|z|-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow |z| = 0 \text{ Ou } |z| = 1 \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions est donc $\mathbb{U}\bigcup\{0\}$.

3. Commençons par remarquer que $\frac{z+4i}{5z-3}$ est bien défini si et seulement si $z \neq \frac{3}{5}$.

   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{3}{5}\right\}$. On pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{z+4i}{5z-3} &= \frac{(x+i(y+4))}{(5x-3)+5iy} \\ &= \frac{(x+i(y+4))((5x-3)-5iy)}{((5x-3)+iy)((5x-3)-5iy)} \\ &= \frac{x(5x-3)+i(y+4)(5x-3)-5ixy+5y(y+4)}{(5x-3)^2+y^2} \\ &= \frac{5x^2-3x+5y^2+20y}{(5x-3)^2+y^2} + i\frac{20x-3y-12}{(5x-3)^2+y^2} \end{aligned}$$

   $\frac{z+4i}{5z-3}$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

$$\begin{aligned} \Im m\left(\frac{z+4i}{5z-3}\right) = 0 &\Leftrightarrow 20x-3y-12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \frac{3\lambda}{20}+\frac{3}{5} \text{ Et } y = \lambda \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z+4i}{5z-3}$ soit réel est

$$\left\{\frac{3\lambda}{20}+\frac{3}{5}+i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\right\}$$

   Le paramètre est choisi dans $\mathbb{R}^*$, car pour $\lambda = 0$ on obtient $\frac{3}{5}$, valeur de z pour laquelle $\frac{3\lambda}{20}+\frac{3}{5}$ n'est pas défini.

4. $\frac{z+4i}{5z-3}$ est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

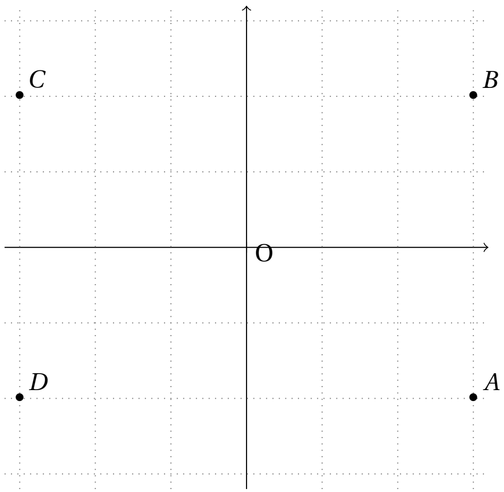
$$\begin{aligned} \Re e\left(\frac{z+4i}{5z-3}\right) = 0 &\Leftrightarrow 5x^2-3x+5y^2+20y = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{5}x + y^2 + 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\frac{3}{10})^2 + \frac{9}{100} + (y+2)^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\frac{3}{10})^2 + (y+2)^2 = \left(\frac{\sqrt{409}}{10}\right)^2 \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z+4i}{5z-3}$ soit imaginaire pur est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre $A(\frac{3}{10}-2i)$ et de rayon $\frac{\sqrt{409}}{10}$, excepté le point B d'affixe $\frac{3}{5}$. En effet,

$$AB = \sqrt{(\frac{3}{5}-\frac{3}{10})^2+(-2)^2} = \sqrt{\frac{9}{100}+4} = \frac{\sqrt{409}}{10}.$$

Solution 10 –

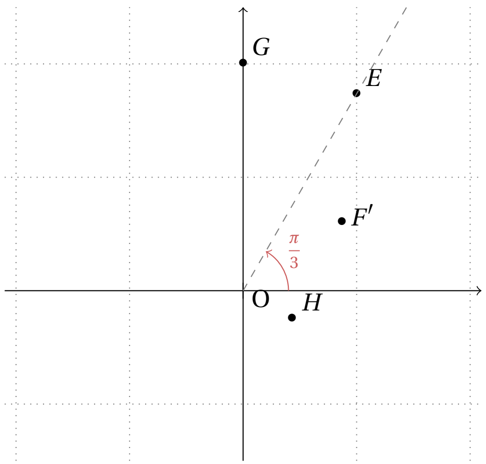
1. On peut placer B, C et D en calculant leurs affixes sous forme algébrique ou en utilisant les propriétés de symétrie par rapport à l'axe des abscisses (passage au conjugué) ou par rapport à l'origine (multiplication par -1). On trouve



2. Puisque $|z_E| = 2$ et qu'un argument de E est $\pi/3$, on a $OE = 2$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OE}) = \pi/3[2\pi]$. Pour placer F, on peut d'abord placer F' d'affixe $e^{i\pi/6}$ puis procéder par symétrie par rapport à lorigine. Pour placer G et H, on calcule

$$z_G = 2e^{i\pi/3}e^{i\pi/6} = 2e^{i\pi/2} = 2i$$
$$z_H = \frac{1}{2}e^{i\pi/6}e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/6}$$

puis on procède comme précédemment.



Solution 11 –

1. Soit A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-i$, et M le point d'affixe z. Alors $|z-i|$ est la longueur AM, $|z+i|$ est la longueur BM, et la condition recherchée est $AM = BM$, c'est-à-dire M est sur la médiatrice de $[AB]$, soit encore M sur l'axe réel, soit z réel.
2. $z = -5+2i$ n'est pas solution et l'équation est équivalente à $|z-3+i| = |z+5-2i|$ soit encore $|z-(3-i)| = |z-(-5+2i)|$. Autrement dit, le point M d'affixe z est à égale distance du point A d'affixe $3-i$ et du point B d'affixe $-5+2i$. L'ensemble des points recherché est donc la médiatrice de $[AB]$.
3. Factorisons par $1+i$ dans le module. On trouve :
$$|1+i|\left|z - \frac{2i}{1+i}\right| = 2$$
Puisque $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\dfrac{2i}{1+i} = 1+i$, ceci est équivalent à
$$|z-(1+i)| = \sqrt{2}$$
Ainsi, l'ensemble des points M correspondants est le cercle de centre le point $A(1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
4. On a $3+iz = i(-3i+z)$ et $3-iz = -i(3i+z)$ et donc l'équation est équivalente à $|z-3i| = |z-(-3i)|$. Autrement dit, le point M d'affixe z est à égale distance du point A d'affixe $3i$ et du point B d'affixe $-3i$. Le point M est donc sur la médiatrice de $[AB]$ c'est-à-dire sur l'axe des abscisses.

Solution 12 – Soit $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ un complexe avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $|z| = \rho$ et $\left|z^2\right| = \rho^2$. Ainsi,

$$|z| = \left|z^2\right| \iff \rho = \rho^2 \iff \rho \in \{0,1\}.$$

$|0| \neq |-1|$, donc 0 n'appartient pas à l'ensemble recherché. On se contente donc de chercher les éléments de E parmi les complexes de module 1.
Soit $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ un complexe de module 1 avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors

$$\begin{aligned} 1 - z &= \mathrm{e}^{i.0} - \mathrm{e}^{i\theta} \\ &= \mathrm{e}^{i\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-i\theta/2} - \mathrm{e}^{i\theta/2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{i\theta/2}\, 2i \sin(-\theta/2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|1-z| &= \left|e^{i\theta/2}\,2i\sin(-\theta/2)\right|\\ &= \left|e^{i\theta/2}\right||2|\,|i|\,|\sin(-\theta/2)|\\ &= 2|\sin(-\theta/2)|\\ &= 2|\sin(\theta/2)|\\ &= 2\sin(\theta/2)\end{aligned}$$

car $\dfrac{\theta}{2} \in [0,\pi[$ donc $\sin(\theta/2) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}|z| = \left|z^2\right| = |1-z| &\iff 1 = 1 = 2\sin(\theta/2)\\ &\iff \sin(\theta/2) = \frac{1}{2}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ Ou } \frac{\theta}{2} = \frac{5\pi}{6}+2k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{3}+4k\pi \text{ Ou } \theta = \frac{5\pi}{3}+4k\pi\\ &\iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}\end{aligned}$$

car on a choisi θ dans $[0,2\pi[$. On en déduit que

$$E = \left\{e^{\frac{\pi}{3}}, e^{\frac{5\pi}{3}}\right\} = \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Solution 13 –

1. On a (en utilisant le fait que $|z|=1$) :

$$Z = \frac{(z^2-1)\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{z^2\overline{z}-\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z|z|^2-\overline{z}}{|z|^2} = z-\overline{z} = 2i\Im m(z).$$

D'où $Z \in i\mathbb{R}$.

2. Encore une fois, en utilisant le fait que $|z|=1$:

$$Z' = \frac{(zz'-1)(\overline{z'-z})}{(z'-z)(\overline{z'-z})} = \frac{zz'\overline{z'}-zz'\overline{z}-\overline{z'}+\overline{z}}{|z'-z|^2} = \frac{z\left|z'\right|^2-z'|z|^2-\overline{z'}+\overline{z}}{|z'-z|^2}$$

D'où

$$Z' = \frac{z-z'-\overline{z'}+\overline{z}}{|z'-z|^2} = \frac{2\Re e(z)-2\Re e(z')}{|z'-z|^2}.$$

Donc $Z' \in \mathbb{R}$.

Solution 14 –

1.

$$\begin{aligned}|u+v|^2+|u-v|^2 &= (u+v)(\overline{u}+\overline{v})+(u-v)(\overline{u}-\overline{v})\\ &= u\overline{u}+u\overline{v}+v\overline{u}+v\overline{v}+u\overline{u}-u\overline{v}-v\overline{u}+v\overline{v}\\ &= 2|u|^2+2|v|^2\end{aligned}$$

2. Le sommes des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des cotés.
   Dans le cas d'un rectangle, on retrouve en fait le théorème de Pythagore.
3. On note ABC un triangle, et I le milieu du segment $[BC]$. On note D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. On considère que A est l'origine du repère et on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. En appliquant la formule de la première question, on a :

$$\begin{aligned}AD^2+BC^2 &= 2AB^2+2AC^2\\ 4AI^2+BC^2 &= 2AB^2+2AC^2\\ AI &= \frac{\sqrt{2AB^2+2AC^2-BC^2}}{2}\end{aligned}$$

Solution 15 – Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

a) On applique l'égalité triangulaire à $z+z'$ et $z-z'$:

$$\left|z+z'\right|+\left|z-z'\right| \geqslant \left|z+z'+z-z'\right| = 2|z|.$$

En inversant les rôles de z et z', on obtient

$$\left|z+z'\right|+\left|z'-z\right| \geqslant 2\left|z'\right|.$$

En faisant la somme de ces deux lignes, on obtient

$$\left|z+z'\right|+\left|z-z'\right| \geqslant |z|+\left|z'\right|.$$

Il y a égalité si et seulement si il y a égalité dans les deux premières équations c'est-à-dire si et seulement si il existe k et k' des réels positifs tels que

$$(S)\begin{cases}(z+z') = k(z-z') \text{ Ou } (z-z')=0\\ (z+z') = k'(z'-z) \text{ Ou } (z'-z)=0\end{cases}$$

Alors, on a

$$(S) \Leftrightarrow z = z' \text{ Ou } \frac{z-(-z')}{z-z'} \in \mathbb{R}_+$$

Cela se produit donc si et seulement si les points d'affixes respectives z, z' et $-z'$ sont alignés dans cet ordre.

b) On pose $z = a + ib$ avec a et b réels. Alors, les lignes suivantes sont équivalentes :

$$(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$$
$$|a|^2 - 2|a|\,|b| + |b|^2 \geqslant 0$$
$$|a|^2 + |b|^2 \geqslant 2|a|\,|b|$$
$$2|a|^2 + 2|b|^2 \geqslant 2|a|\,|b| + |a|^2 + |b|^2$$
$$2(|a|^2 + |b|^2) \geqslant (|a| + |b|)^2$$

Comme les termes en jeu sont positifs, on obtient que cela équivaut à

$$\sqrt{2}\sqrt{|a|^2 + |b|^2} \geqslant |a| + |b|$$
$$\sqrt{2}\,|z| \geqslant |\Re e(z)| + |\Im m(z)|$$

Comme on a raisonné par équivalence, il y a égalité si et seulement si $(|a| - |b|)^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $|a| = |b|$, c'est-à-dire si et seulement si z est de la forme $x + ix$ ou $x - ix$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Géométriquement, cela correspond à l'affixe des points se trouvant sur une des deux bissectrices du plan.

Solution 16 – On montre que l'égalité est vraie si et seulement si pour tout i, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_i = \lambda_i z_1$. On montre la propriété par récurrence sur n. Le cas d'égalité de la Proposition 4.27 du cours montre la propriété à l'ordre 2. Supposons la propriété vraie avec $n-1$ termes. On a :

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}| + |z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

Et donc :

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{n-1}|$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout i entre 1 et $n-1$, $z_i = \lambda_i z_1$ où λ_i est réel positif.

On a donc $z_1 + \cdots + z_{n-1} = (1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1})\, z_1 \neq 0$ donc en appliquant le résultat avec $n = 2$ on obtient :

$$z_n = \alpha\,(z_1 + \cdots + z_{n-1}) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$$

soit $z_n = \lambda_1 z_1$ avec $\lambda_n = \alpha\,(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}_+$.

Solution 17 –

1. Mettons le nombre complexe $1+i$ sous forme trigonométrique. On a $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Et $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, $1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{ni\pi}{4}}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(1+i)^n \in \mathbb{R} &\iff \frac{n\pi}{4} \equiv 0[\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N},\quad \frac{n\pi}{4} = k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N},\quad n = 4k\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+i)^n \in \mathbb{R}$ est

$$\{4k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$$

2. Procédons de la même manière. Mettons le nombre complexe $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique. On a $\left|\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Par ailleurs, $\sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$. Et $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Ainsi, $\sqrt{3} + i = 2\,\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\sqrt{3} + i)^n = 2^n\,\mathrm{e}^{\frac{ni\pi}{6}}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R} &\iff \frac{n\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N},\quad \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N},\quad n = 6k+3\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R}$ est

$$\{6k+3\,;\, k \in \mathbb{N}\}$$

Solution 18 –

1. $j = \cos(\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{2\pi}{3}) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.
2. $j^2 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\dfrac{4\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{4\pi}{3}) = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $j^3 = \mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{3}} = 1$.
3. On a :

$$1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

4. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a
$$j^{3k} + j^{3k+1} + j^{3k+2} = (j^k)^3 + (j^k)^3 j + (j^k)^3 j^2 = 1 + j + j^2 = 0.$$
Donc, $1 + j + j^2 + j^3 + \cdots + j^{2021} = 0$.
On peut aussi dire que comme $j \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{2021} j^k = \frac{1 - j^{2022}}{1 - j} = \frac{1 - (j^3)^{674}}{1 - j} = \frac{1 - (1)^{674}}{1 - j} = 0.$$

Solution 19 –

1. Pour $f(z) = z$, il n'y a rien à faire. Pour $f(z) = \overline{z}$, ceci vient des propriétés du cours sur le conjugué d'un nombre complexe.
2. (a) Utilisons la propriété (c) avec $z = z' = i$. On a
$$f(i \times i) = f(i) \times f(i) = (f(i))^2.$$
Mais on a $i \times i = -1$ et d'après la propriété (a), $f(-1) = -1$. On a donc
$$(f(i))^2 = -1$$
Or, les solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont $z = i$ et $z = -i$. Donc $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.
(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons-le $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors
$$\begin{aligned} f(z) &= f(a+ib) \\ &= f(a) + f(ib) \\ &= f(a) + f(i) f(b) \\ &= a + ib \\ &= z \end{aligned}$$
On a donc démontré que $f(z) = z$ pour tout nombre complexe z.
(c) On procède de la même façon. Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on écrit $z = a + ib$. On a
$$\begin{aligned} f(z) &= f(a+ib) \\ &= f(a) + f(ib) \\ &= f(a) + f(i) f(b) \\ &= a - ib \\ &= \overline{z} \end{aligned}$$
On a donc démontré que $f(z) = \overline{z}$ pour tout nombre complexe z.
3. Dans cet exercice, on a démontré que les fonctions solutions du problème sont exactement les fonctions définies par $f(z) = z$ et $f(z) = \overline{z}$.

Solution 20 – Il s'agit essentiellement d'identifier des formes trigonométriques.

1.
2. Posons $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Alors $e^z = e^a e^{ib}$. Ceci nous incite à mettre $3\sqrt{3} - 3i$ sous forme trigonométrique. On obtient
$$\left|3\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{27+9} = 6$$
Il vient
$$3\sqrt{3} - 3i = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 6e^{-i\pi/6}$$
On obtient alors $\exp a = 6$ et $b = -\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Les solutions de l'équation sont donc les nombres complexes $\ln(6) + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
3. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = 1 + i\sqrt{3} &\iff \mathrm{e}^x = |1 + i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{et} \quad y \text{ est un argument de } 1 + i\sqrt{3} \\ &\iff x = \ln(2) \text{ et } y \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(2) + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi \end{aligned}$$

Solution 21 –

1. • Soit $\delta = a + ib$ un complexe écrit sous forme algébrique ($a, b \in \mathbb{R}$). Alors
$$\delta^2 = -18i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = |-18i| \\ 2ab = \mathrm{Im}(-18i) \\ a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(-18i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 18 \\ 2ab = -18 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2ab = -18 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases}$$
(où l'on a additionné les premières et dernières lignes). Finalement,
$$\delta^2 = -18i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \text{ Ou } a = -3 \\ b = \frac{-9}{a} \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases}$$
Donc $\boxed{\text{les racines carrées de } -18i \text{ sont } 3 - 3i \text{ et } -3 + 3i.}$
• Soit $\delta = a + ib$ un complexe écrit sous forme algébrique ($a, b \in \mathbb{R}$). Alors
$$\delta^2 = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = |1 - i| \\ 2ab = \mathrm{Im}(1 - i) \\ a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(1 - i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{2} \\ 2ab = -1 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ b = \frac{-1}{2a} \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les racines carrées de } 1-i \text{ sont } \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}}.$

• Soit $\delta = a+ib$ un complexe écrit sous forme algébrique ($a, b \in \mathbb{R}$). Alors

$$\delta^2 = -\sqrt{3}+i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 2 \\ 2ab = 1 \\ a^2-b^2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3}) \\ b = \frac{1}{2a} \\ a^2-b^2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les racines carrées de } -\sqrt{3}+i \text{ sont } \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \text{ et } -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}.$

• Soit $\delta = a+ib$ un complexe écrit sous forme algébrique ($a, b \in \mathbb{R}$). Alors

$$\delta^2 = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \\ a^2-b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b = \frac{-2}{a} \\ a^2-b^2 = 3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les racines carrées de } 3-4i \text{ sont } 2-i \text{ et } -2+i.}$

• Soit $\delta = a+ib$ un complexe écrit sous forme algébrique ($a, b \in \mathbb{R}$). Alors

$$\delta^2 = -5-12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 13 \\ 2ab = -12 \\ a^2-b^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b = \frac{-6}{a} \\ a^2-b^2 = -5 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les racines carrées de } -5-12i \text{ sont } 2-3i \text{ et } -2+3i.}$

$z = \sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8}$ est une racine carrée de $1+i$, donc $z^5 = 2\sqrt[4]{2}\,e^{5i\pi/8}$ est une racine carrée de $(1+i)^5$. L'autre racine carrée est alors $2\sqrt[4]{2}\,e^{13i\pi/8}$

2. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $4x+2i(1-x^2)$ est non-nul.

Soit $\delta = a+ib$ avec a et b réels. Alors

$$\delta^2 = 4x+2i(1-x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 4x \\ 2ab = 2(1-x^2) = 2(1-x)(1+x) \\ a^2+b^2 = 2(x^2+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 4x \\ ab = (1-x)(1+x) \\ 2a^2 = 2x^2+4x+2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 4x \\ ab = (1-x)(1+x) \\ a^2 = x^2+2x+1 = (x+1)^2 \end{cases}$$

Si x est différent de -1, alors

$$\delta^2 = 4x+2i(1-x^2) \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 4x \\ ab = (1-x)(1+x) \\ a = x+1 \text{ Ou } a = -x-1 \end{cases}$$

Dans ce cas, les deux racines carrées sont $x+1+i(1-x)$ et $-(1+x)+i(x-1)$.

Si $x=-1$, alors $4x+2i(1-x^2) = -4$, dont les racines carrées sont $2i$ et $-2i$.

Finalement, on remarque que les expressions $x+1+i(1-x)$ et $-(1+x)+i(x-1)$ sont valides dans tous les cas.

3. (a) $4+4i\sqrt{3} = 8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   Les racines cubiques de $4+4i\sqrt{3}$ sont $\sqrt[3]{8}\,e^{i\pi/9}$; $\sqrt[3]{8}\,e^{i\pi/9}e^{2i\pi/3}$; $\sqrt[3]{8}\,e^{i\pi/9}e^{4i\pi/3}$, c'est-à-dire :
   $2\,e^{i\pi/9}$; $2\,e^{7i\pi/9}$; $2\,e^{13i\pi/9}$.

   (b) $\frac{\sqrt{3}+i}{i-\sqrt{3}} = \frac{2\,e^{i\pi/6}}{2\,e^{i5\pi/6}} = e^{i\frac{-2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

   Les racines quatrièmes de $\frac{\sqrt{3}+i}{i-\sqrt{3}}$ sont $e^{i\pi/3}$; $e^{5i\pi/6}$; $e^{4i\pi/3}$; $e^{11i\pi/6}$.

   (c) $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{3}-i} = \frac{2\,e^{i\pi/4}}{2\,e^{-i\pi/6}} = e^{5i\pi/12}$

   Les racines cinquièmes de $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{3}-i}$ sont $e^{i\pi/12}$; $e^{29i\pi/60}$; $e^{53i\pi/60}$; $e^{77i\pi/60}$; $e^{101i\pi/60}$.

Solution 22 –

$$\begin{aligned}1+\sqrt[3]{2}j+\sqrt[3]{4}j^2 &= (\sqrt[3]{2}j)^0+(\sqrt[3]{2}j)^1+(\sqrt[3]{2}j)^2\\ &= \frac{1-(\sqrt[3]{2}j)^3}{1-\sqrt[3]{2}j}\\ &= \frac{-1}{1-\sqrt[3]{2}j}\end{aligned}$$

Donc $\left|1+\sqrt[3]{2}j+\sqrt[3]{4}j^2\right| = \dfrac{1}{\left|1-\sqrt[3]{2}j\right|}$.

$$\begin{aligned}1-\sqrt[3]{2}j &= 1-\sqrt[3]{2}(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3))\\ &= 1-\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\\ &= \left(1+2^{-2/3}\right)-i\left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left|1-\sqrt[3]{2}j\right| &= \sqrt{\left(1+2^{-2/3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{1+2^{1/3}+2^{-4/3}+2^{-4/3}3}\\ &= \sqrt{1+2^{1/3}+4\times 2^{-4/3}}\\ &= \sqrt{1+2^{1/3}+2^{2/3}}\\ &= \sqrt{1+2^{1/3}+2^{2/3}}\\ &= \sqrt{\frac{2-1}{2^{1/3}-1}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{1/3}-1}}\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\left|1+\sqrt[3]{2}j+\sqrt[3]{4}j^2\right| = \sqrt{2^{1/3}-1}.}$

Solution 23 –

a) Le discriminant de l'équation est $\Delta = i^2-4(1-i)(1+i) = -1-4-4i+4i-4 = -9$. $\delta = 3i$ est une racine carrée de de Δ.

Les deux solutions sont donc z_1 et z_2 avec

$$z_1 = \frac{-i-3i}{2(1+i)} = -2i\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = -i(1-i) = -1-i,$$

$$z_2 = \frac{-i+3i}{2(1+i)} = i\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

b) Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (1-i)^2-4(1+i)2(1+i) = -18i.$$

$\delta = 3-3i$ est une racine carrée de de Δ d'après l'exercice Refracines.
Les deux solutions sont donc z_1 et z_2 avec

$$z_1 = \frac{-(1-i)+(3-3i)}{2(1+i)} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

$$z_2 = \frac{-(1-i)-(3-3i)}{2(1+i)} = \frac{-2+2i}{1+i} = \frac{(-2+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4i}{2} = 2i.$$

c) Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (3-2i)^2-4(5-i) = -15-8i.$$

$\delta = 1-4i$ est une racine carrée de de Δ.
Les deux solutions sont donc z_1 et z_2 avec

$$z_1 = \frac{3-2i+(1-4i)}{2} = 2-3i,$$

$$z_2 = \frac{3-2i-(1-4i)}{2} = 1+i.$$

d) Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (5-14i)^2-4(-24-10i) = -75-100i.$$

$\delta = 5-10i$ est une racine carrée de de Δ.
Les deux solutions sont donc z_1 et z_2 avec

$$z_1 = \frac{5-14i+(5-10i)}{2} = -2i,$$

$$z_2 = \frac{5-14i-(5-10i)}{2} = 5-12i.$$

e) Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $y = z^2$. Alors

$$z^4 + (5i-4)z^2 - 1 - 7i = 0 \iff y^2 + (5i-4)y - 1 - 7i = 0.$$

Résolvons cette équation du second degré en y. Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (5i-4)^2 - 4(-1-7i) = -5-12i.$$

$\delta = 2-3i$ est une racine carrée de de Δ d'après l'exercice Refracines.
Les deux solutions de l'équation en y sont donc y_1 et y_2 avec

$$y_1 = \frac{4-5i+(2-3i)}{2} = 3-4i,$$
$$y_2 = \frac{4-5i-(2-3i)}{2} = 1-i.$$

Les solutions de l'équation de l'énoncé sont donc les complexes z tels que z^2 soit égal à y_1 ou y_2, c'est à dire les racines carrées de y_1 et y_2. D'après l'exercice Refracines, l'ensemble des solutions de l'équation de l'énoncé est donc

$$\left\{2-i, -2+i, \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}\right\}.$$

f) On vérifie aisément que 1 et -1 sont des solutions de cette équation. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on sait que le terme de gauche se factorise par $(z-1)(z+1)$, c'est à dire par (z^2-1) :

$$\begin{aligned}1 + iz - z^2 - iz^3 = 0 &\iff -i(z^3 - iz^2 - z + i) = 0\\ &\iff (z^3 - iz^2 - z + i) = 0\\ &\iff (z^2-1)(z-i) = 0\end{aligned}$$

Donc l'équation admet trois solutions : 1, -1 et i.

Solution 24 –

A) Soient a, b des complexes.
(a,b) est solution du système A) si et seulement si a et b sont les deux solutions (ou l'unique solution double) de

$$z^2 - (5-14i)z + (-24-10i) = 0$$

D'après l'exercice précédent, les deux solutions de cette équation sont $-2i$ et $5-12i$.
Donc les deux couples de solutions du système A) sont
$(5-12i, -2i)$ et $(-2i, 5-12i)$.

B) Soient u, v des complexes.
Si u et v sont solutions du système B, alors

$$\begin{cases} u^2v^2 = (1-8i)^2 = -63-16i \\ u^2+v^2 = -2-16i. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système somme-produit en u^2 et v^2.
On en déduit que u^2 et v^2 sont les deux solutions (ou l'unique solution double) de $z^2 + (2+16i)z - (63+16i)$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2+16i)^2 + 4(63+16i) = 128i$ et ses deux solutions sont $a_1 = -5-12i$ et $a_2 = 3-4i$.
On a donc $(u^2 = a_1$ et $v^2 = a_2)$ ou $(u^2 = a_2$ et $v^2 = a_1)$
Les racines carrées de $-5-12i$ sont $2-3i$ et $-2+3i$.
Les racines carrées de $3-4i$ sont $2-i$ et $-2+i$.
On en déduit que (u,v) est l'un des huit couples suivants :

$$(2-i, 2-3i),\quad (2-i, -2+3i),\quad (-2+i, 2-3i),\quad (-2+i, -2+3i)$$

$$(2-3i, 2-i),\quad (-2+3i, 2-i),\quad (2-3i, -2+i),\quad (-2+3i, -2+i)$$

Réciproquement, on vérifie pour chacun de ces couples s'il est effectivement solution de B). Seuls les premier, quatrième, cinquième et huitième couples sont solution de B).
On en déduit que l'ensemble des solutions de B) est

$$\{(2-i, 2-3i), (-2+i, -2+3i), (2-3i, 2-i), (-2+3i, -2+i)\}.$$

Solution 25 –

1. Le discriminant est $\Delta = (2+i\omega)^2 - 4(2+i\omega-\omega) = -\omega^2 + 4\omega - 4 = -(\omega-2)^2$.
$\delta = i(\omega-2)$ est une racine de Δ.
Si $\omega = 2$, alors (E_ω) a une unique solution double $1+i$.
Sinon, $\Delta \neq 0$ et (E_ω) admet exactement deux solutions :
$$z_1 = \frac{2+i\omega+\delta}{2} = 1-i+i\omega, \qquad z_2 = \frac{2+i\omega-\delta}{2} = 1+i$$

2. Si $\omega \neq 2$:
z_1 est le conjugué de z_2 si et seulement si $z_1 = 1-i$, c'est à dire si et seulement si $\omega = 0$.
Donc, 0 est la seule valeur de ω telle que (E_ω) admette exactement deux solutions complexes conjuguées.

Solution 26 –

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   z est solution de (E_1) si et seulement si z est une racine troisième de -1. -1 est une racine troisième de lui-même donc les 3 racines troisièmes de -1 sont
   $$-1, \qquad -1\times e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad -1\times e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$
   Donc l'ensemble des solutions de (E_1) est
   $$\left\{-1, e^{\frac{5i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi}{3}}\right\}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   z est solution de (E_2) si et seulement si z est une racine 4-ième de $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$. $e^{\frac{i\pi}{8}}$ est une racine 4-ième de i donc les 4 racines 4-ième de i sont
   $$e^{\frac{i\pi}{8}}, e^{\frac{i\pi}{8}}e^{\frac{i\pi}{2}}, -e^{\frac{i\pi}{8}}, e^{\frac{i\pi}{8}}e^{\frac{3i\pi}{2}}$$
   Donc l'ensemble des solutions de (E_2) est
   $$\left\{e^{\frac{i\pi}{8}}, e^{\frac{5i\pi}{8}}, e^{\frac{9i\pi}{8}}, e^{\frac{13i\pi}{8}}\right\}.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   z est solution de (E_3) si et seulement si z est une racine 8-ième de -1. $e^{\frac{i\pi}{8}}$ est une racine 8-ième de -1 donc les 8 racines 8-ièmes de -1 sont les $e^{\frac{i\pi}{8}}\times e^{\frac{2ki\pi}{8}}$ avec $k \in [\![0,7]\!]$. Donc l'ensemble des solutions de (E_3) est
   $$\left\{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{8}} \mid k \in [\![0,7]\!]\right\}.$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   z est solution de (E_4) si et seulement si z est une racine troisième de $-(2+i)^3$. $-(2+i)$ est une racine troisième de $-(2+i)^3$ donc les 3 racines troisièmes de $-(2+i)^3$ sont
   $$-(2+i), \qquad -(2+i)\times e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad -(2+i)\times e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$
   c'est-à-dire
   $$-(2+i), \qquad -(2+i)\times\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \qquad -(2+i)\times\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$
   Donc l'ensemble des solutions de (E_4) est
   $$\left\{-(2+i), \frac{2+\sqrt{3}-i(2\sqrt{3}-1)}{2}, \frac{2-\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}+1)}{2}\right\}.$$

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Remarquons que 0 n'est pas solution de (E_5).
   z est solution de (E_5) si et seulement si $\left(\frac{z+1}{z}\right)^n = 1$, c'est à dire si et seulement si $\frac{z+1}{z}$ est une racine n-ième de l'unité.
   Les racines n-ièmes de l'unité sont les ω^k avec $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors,
   $$\begin{aligned}\frac{z+1}{z} = \omega^k &\Leftrightarrow z+1 = z\omega^k\\ &\Leftrightarrow z(\omega^k - 1) = 1\end{aligned}$$
   Si $k = 0$, cela n'est pas possible (car la dernière ligne est alors $0 = 1$).
   Si $k \neq 0$, on a
   $$\begin{aligned}\frac{z+1}{z} = \omega^k &\Leftrightarrow z+1 = z\omega^k\\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{\omega^k - 1}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{e^{ik\pi/n}}\,\frac{1}{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2i\sin(k\pi/n)\,e^{ik\pi/n}}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{e^{-ik\pi/n}}{2i\sin(k\pi/n)}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{\cos(-k\pi/n) + i\sin(-k\pi/n)}{2i\sin(k\pi/n)}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{-i\cos(\frac{k\pi}{n})}{2\sin(k\pi/n)} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$
   Donc l'ensemble des solutions de (E_5) est
   $$\left\{\frac{-i\cos(\frac{k\pi}{n})}{2\sin(k\pi/n)} - \frac{1}{2} \mid k \in [\![1, n]\!]\right\}.$$

6. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$.
   $$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2n} = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{ik\pi/n}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ 1+iz = e^{ik\pi/n} - iz\,e^{ik\pi/n}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ z(i(1+e^{ik\pi/n})) = e^{ik\pi/n} - 1\end{aligned}$$

Lorsque $k=n$, on a $0=-2$, ce qui est exclu. Donc $k\neq n$ et $1+e^{ik\pi/n}\neq 0$ et

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2n}=1 &\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,2n]\!]\setminus\{n\},\ \ z=\frac{e^{ik\pi/n}-1}{i(e^{ik\pi/n}+1)}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,2n]\!]\setminus\{n\},\ \ z=\frac{e^{ik\pi/2n}}{i\,e^{ik\pi/2n}}\frac{e^{ik\pi/2n}-e^{-ik\pi/2n}}{e^{ik\pi/2n}+e^{-ik\pi/2n}}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,2n]\!]\setminus\{n\},\ \ z=\frac{1}{i}\frac{2i\sin(k\pi/2n)}{2\cos(k\pi/2n)}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,2n]\!]\setminus\{n\},\ \ z=\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_6) est donc

$$\left\{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\mid k\in[\![1,2n]\!]\setminus\{n\}\right\}$$

Soit un total de $2n-1$ solutions.

7. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(z^2+1)^7=(z+i)^{14} &\iff ((z-i)(z+i))^7=(z+i)^{14}\\ &\iff z+i=0 \text{ Ou } \left(z+i\neq 0 \text{ Et } (z-i)^7=(z+i)^7\right)\end{aligned}$$

Si $z\neq -i$, en reconnaissant qu'il s'agit de racines septièmes de l'unité, on a

$$\begin{aligned}(z-i)^7=(z+i)^7 &\iff \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^7=1\\ &\iff \exists k\in[\![0,6]\!],\quad \frac{z-i}{z+i}=e^{\frac{2ik\pi}{7}}\\ &\iff \exists k\in[\![0,6]\!],\quad z-i=e^{\frac{2ik\pi}{7}}(z+i)\\ &\iff \exists k\in[\![0,6]\!],\quad z(1-e^{\frac{2ik\pi}{7}})=i(1+e^{\frac{2ik\pi}{7}})\end{aligned}$$

Pour $k=0$, $z(1-e^{\frac{2ik\pi}{7}})=i(1+e^{\frac{2ik\pi}{7}})$ n'a pas de solutions. On peut donc "oublier" ce cas.

$$\begin{aligned}(z-i)^7=(z+i)^7 &\iff \exists k\in[\![1,6]\!],\quad z=i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{7}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{7}}}\\ &\iff \exists k\in[\![1,6]\!],\quad z=i\frac{e^{\frac{ik\pi}{7}}(e^{\frac{-ik\pi}{7}}+e^{\frac{ik\pi}{7}})}{e^{\frac{ik\pi}{7}}(e^{\frac{-ik\pi}{7}}-e^{\frac{ik\pi}{7}})}\\ &\iff \exists k\in[\![1,6]\!],\quad z=i\frac{2\cos(-\frac{k\pi}{7})}{2i\sin(-\frac{k\pi}{7})}\\ &\iff \exists k\in[\![1,6]\!],\quad z=\frac{-1}{\tan(\frac{k\pi}{7})}\end{aligned}$$

Les solutions de (E_7) sont donc $-i$ et les $\dfrac{-1}{\tan(\frac{k\pi}{7})}$ pour k entier de 1 à 6.

Solution 27 –

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. x est une solution de (E) si et seulement si

$$x^4-4x^3+8x-5+i(-4x^3+12x^2-8x)=0.$$

Un complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles.

$$\begin{aligned}x \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \begin{cases}-4x^3+12x^2-8x &= 0\\ x^4-4x^3+8x-5 &= 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-4x(x^2-3x+2) &= 0\\ x^4-4x^3+8x-5 &= 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-4x(x-1)(x-2) &= 0\\ x^4-4x^3+8x-5 &= 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\in\{0;1;2\}\\ x^4-4x^3+8x-5=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=1\end{aligned}$$

La solution réelle de (E) est $x=1$.

2. Soit $y\in\mathbb{R}$. iy est une solution de (E) si et seulement si

$$(iy)^4-4(1+i)(iy)^3+12i(iy)^2-8i(1+i)(iy)-5=0.$$

$$\begin{aligned}iy \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow y^4-4y^3+8y-5+i(4y^3-12y^2+8y)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}4y^3-12y^2+8y &= 0\\ y^4-4y^3+8y-5 &= 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}4y(y-1)(y-2) &= 0\\ y^4-4y^3+8y-5 &= 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y\in\{0;1;2\}\\ y^4-4y^3+8y-5=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow y=1\end{aligned}$$

La solution imaginaire pure de (E) est $w=i$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on raisonne par équivalences

$$\begin{aligned} & z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = (z-x)(z-w)(z^2+az+b) \\ \Leftrightarrow & z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 \\ & = z^4 + (a-1-i)z^3 + (i-(1+i)a+b)z^2 + (a-b-ib)z + ib \end{aligned}$$

En posant $b = 5i$ et $a = -3-3i$, on vérifie facilement que cette relation est vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4. Déterminons les solutions de (E_2) $z^2 + (-3-3i)z + 5i = 0$.
Son discriminant est $\Delta = (-3)^2 + (-3i)^2 + 2(-3)(-3i) - 4 \times 5i = -2i$.
$\delta = i - 1$ est une racine carrée de Δ. Donc les solutions de $E_2)$ sont

$$z_1 = \frac{3+3i-\delta}{2} = 2+i, \quad z_2 = \frac{3+3i+\delta}{2} = 2i+1.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\{1; i; 2+i; 2i+1\}.$$

Solution 28 – Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta}$. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $z_k = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$. En utilisant la factorisation par l'angle moitié, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad (1+z_k)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)}$$

Ainsi, tous les points d'affixe $(1+z_k)^n$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont sur la droite portée par $e^{i\theta/2}$ et sont donc alignés.

Solution 29 –

1. (a) On reconnait une similitude directe. Cherchons son centre. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$z = iz + 1 \iff z(1-i) = 1 \iff z = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

Ainsi cette fonction est une similitude de centre $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, de rapport 1 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

(b) On reconnait une homothétie. Cherchons son centre. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$z = 3z - 2 \iff -2z = -2 \iff z = 1$$

Ainsi cette fonction est une homothétie de centre 1 et de rapport 3.

(c) On reconnait une translation de vecteur d'affixe $3-5i$.

(d) On reconnait une similitude directe. Cherchons son centre. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$z = 2(1+i)z - 7 - 4i \iff z\big(1-2(1+i)\big) = -7-4i \iff z(-1-2i) = -7-4i \iff z = \frac{7+4i}{1+2i} = 3-$$

Ainsi cette fonction est une similitude de centre $3-2i$, de rapport $|2(1+i)| = 2\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons z' l'image de z par la rotation de centre $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.
On a :

$$z' - (1+i) = e^{i\pi/4}\big(z-(1+i)\big) \quad i.e \quad z' = 1+i+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\big(z-(1+i)\big) = 1+(1-\sqrt{2})i+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$

Une expression explicite de cette fonction est donc

$$z \longmapsto 1 + (1-\sqrt{2})i + e^{i\pi/4} z$$