

EXERCICES — CHAPITRE 3

Exercice 1 (♣) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $\sin x = 0$. | 2. $\sin x = 1$. | 3. $\sin x = -1$. |
| 4. $\tan x = 0$. | 5. $\tan x = 1$. | 6. $\cos x = \frac{1}{2}$. |
| 7. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. | 8. $ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. | |

Exercice 2 (♣) – Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Simplifier l'expression $\frac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$.

Exercice 3 (♣) – Pour chacune des équations suivantes, la résoudre dans l'intervalle I indiqué :

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$.
2. $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$.
3. $\sin x = \tan x$, $I = [0, 2\pi]$.
4. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$, $I =]-\pi; \pi]$.
5. $3\sin(2x) - 3\sqrt{3}\cos(2x) = \sqrt{18}$, $I = [0; 2\pi]$.

Exercice 4 (♣) – Pour chacune des inéquations suivantes d'inconnue x , la résoudre dans l'intervalle I indiqué :

1. $\cos x \leq \frac{1}{2}$, $I =]-\pi; \pi]$.
2. $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $\cos^2 x \geq \cos(2x)$, $I =]-\pi; \pi]$.
4. $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$.
5. $\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3}$, $I = [0, 9\pi]$.

Exercice 5 (♦) – Soit $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Montrer que $\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$ et $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$ pour $\theta \in E$.

2. En déduire une écriture de $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ pour $\theta \in E$.

3. Résoudre l'équation $\sin(2\theta) = 3 \tan(\theta)$ sur E .

Exercice 6 (♣) – Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 7 (♥) – Montrer que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 (♠) – Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$

Exercice 9 (♣) –

1. Soient p et q des réels. Montrer que

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2. Déterminer des formules similaires permettant de transformer en produit $\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$

Exercice 10 (♣) – Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 11 (♣) – Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que l'expression $3(\cos^4 x + \sin^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ ne dépend pas de x

Exercice 12 (♠) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos^{2018} x + \cos^{2019} x + \cos^{2020} x = 3.$$

Exercice 13 (♦) – Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation

$$\sqrt{3 - 4 \cos^2 x} > 1 + 3 \sin x.$$

Exercice 14 (♠) – Soit $n \geq 3$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1.$$

Exercice 15 (♠) – Soit $n \geq 3$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos^n(x) - \sin^n(x) = 1.$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!