EXERCICES — CHAPITRE 3

Solution 1 – Les ensembles de solutions sont les suivants :

1. $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
5. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
6. $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
7. $\left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
8. $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Solution 2 –

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2x)}{\cos(x)} &= \frac{2\cos(x)\sin(x)}{\sin(x)} - \frac{2\cos(x)^2 - 1}{\cos(x)}\\ &= 2\cos(x) - 2\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)}\\ &= \frac{1}{\cos(x)}\end{aligned}$$

Solution 3 –

1. Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in [0;2\pi]$.
   Soit $x \in [0;2\pi]$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \frac{1}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}; 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ Ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ Ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}.}$

2. $\tan(5x)$ est bien défini si et seulement si $5x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ c'est à dire si et seulement si $x \notin \left\{\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
   Donc, les termes de l'équation sont bien définis si et seulement si $x \in E = [0;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{10}; \frac{3\pi}{10}; \frac{5\pi}{10}; \frac{7\pi}{10}; \frac{9\pi}{10}\right\}$.
   Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}\tan(5x) = 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}; 5x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \left\{\frac{\pi}{20}; \frac{5\pi}{20}; \frac{9\pi}{20}; \frac{13\pi}{20}; \frac{17\pi}{20}\right\}.}$

3. Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in [0;2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.
   Soit $x \in [0;2\pi]$.

$$\begin{aligned}\sin(x) = \tan(x) &\iff \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0\\ &\iff \sin(x)\left(1 - \frac{1}{\cos(x)}\right) = 0\\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ Ou } \cos(x) = 1\\ &\iff \sin(x) = 0.\end{aligned}$$

   En effet, on a toujours $\sin(x) = 0$ lorsque $\cos(x) = 1$.
   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \{0;\pi;2\pi\}.}$

4. Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in]-\pi;\pi]$.
   Soit $x \in]-\pi;\pi]$.

$$\begin{aligned}12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2 &\iff 6\cos^2(x) - 4(1-\cos^2(x)) = 1\\ &\iff 10\cos^2(x) = 5\\ &\iff \cos^2(x) = \frac{1}{2}\\ &\iff |\cos(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}.}$

5. Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in [0;2\pi]$.
   On pose $r = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$.
   Soit $x \in [0;2\pi]$.

$$3\sin(2x) - 3\sqrt{3}\cos(2x) = \sqrt{18} \iff \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient. Donc :

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ Ou } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad 2x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ Ou } 2x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \text{ Ou } x = \frac{13\pi}{24} + k\pi\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \left\{\frac{7\pi}{24};\frac{13\pi}{24};\frac{31\pi}{24};\frac{37\pi}{24}\right\}.}$

Solution 4 –

1. $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }]-\pi;-\frac{\pi}{3}]\bigcup[\frac{\pi}{3};\pi].}$
2. $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right].}$
3. Les termes de l'inéquation sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in]-\pi;\pi]$.

$$\begin{aligned}\cos^2(x) \geqslant \cos(2x) &\iff \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \geqslant \cos(2x)\\ &\iff \cos(2x) \leqslant 1\end{aligned}$$

   Ceci est vérifié pour tout $x \in]-\pi;\pi]$, donc
   $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est }]-\pi;\pi].}$

4. Les termes de l'inéquation sont bien définis pour tout $x \in I$.
   Soit $x \in [0;2\pi]$.

$$\cos^2(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff |\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]\bigcup\left[\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right].}$

5. Les termes de l'inéquation sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in [0;9\pi]$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{3} \leqslant \sin\frac{x}{3} &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{3} \leqslant 0\\ &\iff \sin(\frac{\pi}{4})\cos\frac{x}{3} - \cos(\frac{\pi}{4})\sin\frac{x}{3} \leqslant 0\\ &\iff \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) \leqslant 0\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z};\ 2k\pi - \pi \leqslant \frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \leqslant 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z};\ \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leqslant x \leqslant 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \left[\frac{3\pi}{4};3\pi+\frac{3\pi}{4}\right]\bigcup\left[\frac{3\pi}{4}+6\pi;9\pi\right].}$

Solution 5 –

1. Pour tout $\theta \in E$, on a

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\theta)} - \frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\\ &= \frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\end{aligned}$$

   $\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$ est déjà une formule du cours (obtenue en appliquant la formule de $\tan(a+b)$ en $a = b = \theta$).

2. Pour tout $\theta \in E$, on a donc

$$\sin(2\theta) = \tan(\theta)\cos(\theta) = \frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} \times \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}.$$

3. Soit $\theta \in E$. Alors, $\sin(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan(\theta)^2}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sin(2\theta) = 3\tan(\theta) &\iff \frac{2\tan\theta}{1+\tan(\theta)^2} = 3\tan(\theta)\\
&\iff \tan(\theta)\left(\frac{2}{1+\tan(\theta)^2} - 3\right) = 0\\
&\iff \tan(\theta) = 0 \text{ Ou } 2 = 3(1+\tan(\theta)^2)\\
&\iff \tan(\theta) = 0 \text{ Ou } \tan(\theta)^2 = -\frac{1}{3}\\
&\iff \tan(\theta) = 0
\end{aligned}$$

car $\tan(\theta)^2 = -\dfrac{1}{3}$ n'a pas de solution réelle.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$

Solution 6 –

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Solution 7 – On procède par récurrence.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ ».

Initialisation : $(n = 0)$.
$|\sin(0x)| = 0 \leqslant 0 = 0 \times |\sin(x)|$.
Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. On a :

$$\begin{aligned}
&\left|\sin\left((n+1)x\right)\right|\\
&= \left|\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)\right|\\
&\leqslant |\cos(x)||\sin(nx)| + |\sin(x)||\cos(nx)| && \text{par l'inégalité triangulaire}\\
&\leqslant |\sin(nx)| + |\sin(x)| && \text{car } |\cos(y)| \leqslant 1 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}\\
&\leqslant n|\sin(x)| + |\sin(x)| && \text{par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|}$$

Solution 8 – On procède par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ ».

Initialisation : $(n = 2)$.
On a $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
Ainsi, $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. On a :

$$\begin{aligned}
\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)^2 &= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 4\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= 2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\right) && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= 2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in [0;\pi]$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) \geqslant 0$. Ainsi, les deux membres de l'égalité ci-dessus sont positifs. En passant à la racine carrée, on obtient donc :

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} \qquad (n \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n=2$ et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

Solution 9 – Soit $a,\ b,\ p$ et q des réels. On a déjà les formules suivantes :

$$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}} \text{ et } \boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}.}$$

$$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}} \text{ et } \boxed{\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}.}$$

On remarque que : $\left\{\begin{array}{l} a+b=p \\ a-b=q \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{p+q}{2} \\ b=\dfrac{p-q}{2} \end{array}\right.$

En remplaçant $a,\ b,\ a+b$ et $a-b$ par leur expression en fonction de p et q dans les formules précédentes, on obtient

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \end{array}}$$

Solution 10 –

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

La fonction cos est positive sur $[0;\pi/2]$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$. On en déduit

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

La fonction sin est positive sur $[0;\pi/2]$, donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$. On en déduit

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

Solution 11 –

$$\begin{aligned} & 3(\cos^4 x+\sin^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x) \\ & = 3(\cos^4 x+(1-\cos^2(x))^2)-2((1-\cos^2(x))^3+\cos^6 x) \\ & = 3(\cos^4 x+1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)) \\ & \quad -2(1-3\cos^2(x)+3\cos^4(x)-\cos^6(x)+\cos^6 x) \\ & = 1 \end{aligned}$$

Donc l'expression $3(\cos^4 x+\sin^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)$ vaut toujours 1, indépendamment de x.

Solution 12 – Soit $x \in \mathbb{R}$. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\cos^k x \in [-1;1]$, donc

$$\cos^{2018} x+\cos^{2019} x+\cos^{2020} x = 3 \iff \cos^{2018} x = \cos^{2019} x = \cos^{2020} x = 1.$$

$\cos^{2018} x = 1 \iff \cos(x) = 1$ Ou $\cos(x) = -1$.
$\cos^{2019} x = 1 \iff \cos(x) = 1$.
$\cos^{2020} x = 1 \iff \cos(x) = 1$ Ou $\cos(x) = -1$.
Donc

$$\cos^{2018} x+\cos^{2019} x+\cos^{2020} x = 3 \iff \cos x = 1.$$

Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$

Solution 13 – Les termes de l'équation sont bien définis si et seulement si $\cos^2(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$, c'est à dire si et seulement si $|\cos(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right] \bigcup \left[\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$.

- Si $x \in \left[\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$, alors $1+3\sin(x) \leqslant -\dfrac{1}{2} < 0$.
  Donc x est solution.
- ▷ Si $x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$, alors $1+3\sin(x) \geqslant \dfrac{5}{2}$.
  Or, $\sqrt{3-4\cos^2 x} \leqslant \sqrt{3} < \dfrac{5}{2}$.

Donc x n'est pas solution.

⊳ Autre méthode : Si $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, alors $1 + 3\sin(x) > 0$, donc par passage au carré,

$$\begin{aligned} &\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 1 + 3\sin x \\ \iff\ & 3 - 4\cos^2 x > 1 + 6\sin x + 9\sin^2(x) \\ \iff\ & 3 - 4(1 - \sin^2(x) > 1 + 6\sin(x) + 9\sin^2(x) \\ \iff\ & 0 > 2 + 6\sin(x) + 5\sin^2(x) \end{aligned}$$

Cherchons le signe du trinôme $5X^2 + 6X + 2$. Son discriminant est $\Delta = -4$, donc il est toujours positif. Donc x n'est pas solution.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

Solution 14 – Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos^n(x) + \sin^n(x) = 1 &\iff \cos^n(x) - \cos^2(x) + \sin^n(x) - \sin^2(x) = 0 \\ &\iff \cos^2(x)(\cos^{n-2}(x) - 1) \\ &\quad + \sin^2(x)(\sin^{n-2}(x) - 1) = 0 \end{aligned}$$

$\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ sont positifs (ou nuls) et $(\cos^{n-2}(x) - 1)$ et $(\sin^{n-2}(x) - 1)$ sont négatifs (ou nuls).
Une somme de deux termes négatifs est nulle si et seulement si les deux termes sont nuls.
D'où :

$$\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1 \iff \begin{cases} \sin^2(x) = 0 \quad \text{Ou } \sin^{n-2}(x) = 1 \\ \text{Et} \\ \cos^2(x) = 0 \quad \text{Ou } \cos^{n-2}(x) = 1 \end{cases}$$

- Si n est **pair** :

$$\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1 \iff \begin{cases} \sin(x) = 0 \quad \text{Ou } \sin(x) = \pm 1 \\ \text{Et} \\ \cos(x) = 0 \quad \text{Ou } \cos(x) = \pm 1 \end{cases}$$

  On peut en déduire que l'ensemble des solutions est :
  $\boxed{\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

- Si n est **impair** :

$$\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1 \iff \begin{cases} \sin(x) = 0 \quad \text{Ou } \sin(x) = 1 \\ \text{Et} \\ \cos(x) = 0 \quad \text{Ou } \cos(x) = 1 \end{cases}$$

  On peut en déduire que l'ensemble des solutions est :
  $\boxed{\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

Solution 15 – Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si n est **pair** : il existe $k \geqslant 2$ entier tel que $n = 2k$.

$$\cos^n(x) - \sin^n(x) = 1 \iff (\cos^k(x))^2 = 1 + (\sin^k(x))^2.$$

  Comme $(\sin^k(x))^2 \geqslant 0$ et $(\cos^k(x))^2 \leqslant 1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \cos^n(x) - \sin^n(x) = 1 &\iff (\cos^k(x))^2 = 1 \text{ Et } (\sin^k(x))^2 = 0 \\ &\iff (\cos(x)) = \pm 1 \text{ Et } \sin(x) = 0 \end{aligned}$$

  $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$

- Si n est **impair** :

$$\begin{aligned} \cos^n(x) - \sin^n(x) = 1 &\iff \cos^n(-x) + \sin^n(-x) = 1 \\ &\iff -x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

  (d'après l'exercice précédent.) Finalement, on en déduit que l'ensemble des solutions est :
  $\boxed{\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !