

EXERCICES — CHAPITRE 34

Exercice 1 (♣) – Représenter dans le plan les lignes de niveau des fonctions suivantes :

$$f : (x, y) \mapsto x + y - 1, \quad g : (x, y) \mapsto e^{y-x^2}, \quad h : (x, y) \mapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Exercice 2 (♥) – Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

2. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3. $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$.

4. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

5. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin x$.

6. $f(x, y) = x^y$.

7. $f(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice 3 (♥) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + (x - y) \cos(x^2 + y^2).$$

Cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

1. Calculer ses dérivées partielles premières en tout point.
2. Déterminer une équation du plan tangent en $(0, 0, f(0, 0))$.

Exercice 4 (♣) – Soit f et g deux fonctions réelles de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Calculer les dérivées partielles par rapport à x et y des fonctions de deux variables :

a) $\gamma : (x, y) \mapsto f(x)$ b) $\xi : (x, y) \mapsto g(y)$ c) $\chi : (x, y) \mapsto f(x) + g(y)$

Exercice 5 (♥) – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles de f en tout point

Exercice 6 (♥) – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

On définit les fonctions g, h, k par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto f(t, t^2) \qquad h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto f(x + y, x - y)$$

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto f(\exp(x) - y^2, y - 1)$$

Calculer les dérivées premières de g, h et k en fonction de celles de f .

Exercice 7 (♥) – Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes définies de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par :

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

Exercice 8 (♥) – On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g(x) = \ln(x) + 2x + 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$$

2. Déterminer le seul point critique x_0 de f .
3. Montrer que $f(x_0) = -\alpha(\alpha + 1)$.

Exercice 9 (♥) – Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ | 3. $f(x, y) = x^3 + y^3$ |
| 2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$ | 4. $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$ |

Exercice 10 (♠) – On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad (E)$$

d'inconnue la fonction f définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . Pour cela, on posera

$$\text{le changement de variable } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

1. Soit f une fonction solution de (E). On considère la fonction

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \rightarrow f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x + y, x - y).$$

- Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
 - Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g .
 - Démontrer que g vérifie l'équation : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = g(u, v)$.
 - En déduire l'expression de g , puis l'expression de f .
2. Réciproquement, vérifier que toute fonction f de la forme obtenue à la question précédente est bien solution de (E) et conclure.

Quelques vidéos pour se cultiver:

Introduction aux équations aux dérivées partielles :

🎧 [But what is a partial differential equation? - - 3Blue1Brown](#) 🇬🇧

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!