Exercices — Chapitre 34

Solution 1 –

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x,y) = k \iff y = -x + k + 1$$

Donc les lignes de niveau de f sont toutes les droites de pente -1.

2. Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x,y) = k \iff \mathrm{e}^{y-x^2} = k$$

Si $k \leqslant 0$, cette équation n'a pas de solution. Si $k > 0$, alors

$$g(x,y) = k \iff y = x^2 + \ln(k)$$

$\ln(k)$ prend toutes les valeurs réelles possibles, donc les lignes de niveau de g sont toutes les paraboles obtenues par translation verticale de $y = x^2$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x,y) = k \iff \sqrt{1 + x^2 + y^2} = k$$

Si $k < 0$, cette équation n'a pas de solution. Si $k \geqslant 0$, alors

$$h(x,y) = k \iff x^2 + y^2 = k^2 - 1$$

Si $k < 1$, cette équation n' pas de solution. Si $k \geqslant 1$, les solutions correspondent aux points du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k^2-1}$. Comme $\sqrt{k^2-1}$ prend toutes les valeurs réelles positives, les lignes de niveau de h sont tous les cercles de centre O.

Solution 2 –

1. On a $|f(x,y)| \leqslant |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$. On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
2. On a $f(x,x) = 0$ et $f(x,0) = 1$. Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
3. On a $f(x,-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = +\infty$ donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
4. Remarquons que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left|x^3 + y^3\right| \leqslant |x|^3 + |y|^3 \leqslant (|x| + |y|)\left(x^2 + y^2\right) \leqslant 2\|(x,y)\|_1 \left(x^2 + y^2\right)$$

On en déduit que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y)| \leqslant 2\|(x,y)\|_1$$

Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

5. On a d'une part :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et, d'autre part :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 - 1 = -1$$

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$.

6. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(e^{-\frac{1}{x}}, x\right) = \dfrac{1}{e}$ (on vérifie que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}}, x\right) = (0,0)$). On en déduit que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
7. On a :

$$f(x,y) = \frac{\sin x^2}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin y^2}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

D'une part :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y^2}{y^2} = 1$$

D'autre part :

$$0 \leqslant \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et de même

$$0 \leqslant \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

On en déduit que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

puis que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Solution 3 –

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x^2 + y^2) - (x - y)2x\sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos(x^2 + y^2) - (x - y)2y\sin(x^2 + y^2)$$

2. L'équation du plan tangent au point $(0, 0, f(0, 0))$ est

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)$$

En calculant les valeurs dans l'expression précédente, on trouve que le plan tangent recherché admet $z - 1 = x - y$ comme équation.

Solution 4 – γ, ξ et χ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) = f'(x), \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) = g'(y)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(x, y) = f'(x), \qquad \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, y) = g'(y)$$

Solution 5 – f est un quotient de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\left(y(x^2 - y^2) + xy2x\right)(x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\left(x(x^2 - y^2) - xy2y\right)(x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

En $(0, 0)$, on passe par les taux d'accroissements de f par rapport à chaque variable : Pour tout $t > 0$,

$$\frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, \qquad \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

Ces deux quantités tendent vers 0 quand t tend vers 0, donc f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Solution 6 – g est de classe $\mathcal{C}^1$ car f, $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ le sont et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t^2)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(t, t^2)\frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}t}$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(t, t^2)$$

On note $\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$ et $\beta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x - y \end{array}$. Alors $h : (x, y) \mapsto (\alpha(x, y), \beta(x, y))$.
h est de classe $\mathcal{C}^1$ car f, α et β le sont. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \times \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \times \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + y, x - y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x + y, x - y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \times \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \times \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + y, x - y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x + y, x - y)$$

On note $\gamma \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \mathrm{e}^x - y^2 \end{array}$ et $\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y - 1 \end{array}$.
Alors $k : (x, y) \mapsto (\gamma(x, y), \delta(x, y))$. k est de classe $\mathcal{C}^1$ car f, γ et δ le sont.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x, y), \delta(x, y)) \times \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(x, y), \delta(x, y)) \times \frac{\partial \delta}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, y) = \mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^x - y^2, y - 1)$$

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x, y), \delta(x, y)) \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(x, y), \delta(x, y)) \times \frac{\partial \delta}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x, y) = -2y\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^x - y^2, y - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^x - y^2, y - 1)$$

Solution 7 –

a) f est une fonction polynomiale donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3y,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3x$$

On cherche à déterminer les points critiques de f.

$$\begin{aligned}\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} &\iff \begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=x^2\\ x=y^2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=x^2\\ x=x^4\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=x^2\\ x=0\text{ ou }1\end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$. Ce sont donc les seuls points où f peut admettre un extremum local.
Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(0,t)=t^3$, qui change de signe en 0, donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
On a que $f(1,1)=-1$. Pour tout $t,k\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}f(1+t,1+k)-f(1,1)&=(1+t)^3+(1+k)^3-3(1+t)(1+k)+1\\ &=3(t^2-kt+k^2)+t^3+k^3\\ &=3(t^2-kt+k^2)+t^3-(-k)^3\\ &=3(t^2-kt+k^2)+(t-k)(t^2-tk+k^2)\\ &=(3+t-k)(t^2-kt+k^2)\end{aligned}$$

Pour tout $t,k\in\mathbb{R}$, $t^2-kt+k^2\geqslant 0$. En effet, si t est nul, l'expression se simplifie en k^2 qui est positif, et si t est non-nul, il s'agit d'un polynôme en t de degré 2, dont le discriminant est $\Delta=k^2-4k^2\leqslant 0$, donc $t^2-kt+k^2\geqslant 0$.
$3+t-k$ est positif sur $]-1,1[^2$, qui est un voisinage ouvert de $(0,0)$.
Ainsi, $f(1+t,1+k)\geqslant f(1,1)$ au voisinage de $(0,0)$, donc f admet un minimum local de valeur -1 en $(1,1)$.

b) g est une fonction polynomiale donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2(x-y)+3(x+y)^2,\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-2(x-y)+3(x+y)^2$$

On cherche à déterminer les points critiques de g.

$$\begin{aligned}\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} &\iff \begin{cases}2(x-y)+3(x+y)^2=0\\ -2(x-y)+3(x+y)^2=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}(x-y)=0\\ (x+y)^2=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=y\\ 2x^2=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\end{aligned}$$

g admet donc un unique point critique en $(0,0)$.
Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g(t,t)=8t^3$. $g(t,t)>0$ si $t<0$ et $g(t,t)<0$ si $t<0$. Donc g n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ et n'admet donc pas d'extremum local.

Solution 8 –

1. g est une somme des fonctions strictement croissantes ln et $x\mapsto 2x+1$, donc g est strictement croissante. De plus g est continue.
   $\lim\limits_{0} g=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g=+\infty$, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, 0 a un unique antécédent α par g.
2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, alors
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\ln(x)+2x+y^2+1\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy$$
   On détermine les points critiques :
   $$\begin{aligned}\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} &\iff \begin{cases}\ln(x)+2x+y^2+1=0\\ 2xy=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\ln(x)+2x+1=0\\ y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}g(x)=0\\ y=0\end{cases}\end{aligned}$$
   D'après la question précédente, le seul point critique de f est donc $(\alpha,0)$.

3.
$$f(x_0) = f(\alpha, 0) = \alpha(\ln(\alpha) + \alpha)$$

Or, on sait que $\ln(\alpha) + 2\alpha + 1 = 0$, donc $\ln(\alpha) + \alpha = -\alpha - 1$. D'où

$$f(x_0) = \alpha(-\alpha - 1) = -\alpha(\alpha + 1)$$

Solution 9 –

1. On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6.$$

L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donnent les points critiques. On trouve après résolution du système que seul $(0, 3)$ est un point critique de f. Posons $u = x$ et $v = y - 3$ pour se ramener en $(0,0)$. Alors

$$f(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9 = (u + v/2)^2 + 3v^2/4 - 9 \geqslant f(0, 3)$$

Ainsi, $(0, 3)$ est un minimum local, et même global, de f.

2. On trouve cette fois $(1, 1)$ comme unique point critique de f. En posant $u = x - 1$ et $v = y - 1$ (toujours dans l'idée de se ramener en $(0, 0)$), on a

$$f(x, y) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u - v)^2 + v^2 \geqslant f(1, 1)$$

Ainsi, $(1,1)$ est un minimum local, et même global, de f.

3. Le seul point critique est $(0, 0)$. On a $f(x, 0) > 0 = f(0, 0)$ si $x > 0$ et $f(x, 0) < 0 = f(0, 0)$ si $x < 0$. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extrémum local de f.
4. Posons $u = x - y, v = x + y$ et $g(u, v) = u^2 + v^3$. Étudier les extrema locaux de g revient, modulo le changement de variables, à étudier les extrema locaux de f. $(0,0)$ est le seul point critique de g, et puisque $g(0, y) > 0$ si $y > 0$ et $g(0, y) < 0$ si $y < 0, (0, 0)$ n'est pas un extrémum de g. Donc f n'admet pas d'extrémum local.

Solution 10 –

1. (a) f est de classe $\mathcal{C}^1$, tout comme $(u, v) \mapsto \dfrac{u+v}{2}$ et $(u, v) \mapsto \dfrac{u-v}{2}$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y)$$

   (c) Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, comme f est solution de (E), on a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y) + \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y) = g(x + y, x - y)$$
$$2\frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) = g(x + y, x - y)$$

   Ainsi, avec le changement de variable proposé dans l'énoncé, on a pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (car le changement de variable est bijectif),

$$2\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = g(u, v)$$

   (d) À $v \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation est une équation différentielle ordinaire du type $y' = ay$. Ainsi, pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe une constante $h(v) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g(u, v) = h(v)\,\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}.$$

   En réécrivant cela $h(v) = g(u, v)\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}$, on voit que h est une fonction de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, car g et exp le sont aussi.
   En utilisant le changement de variable, on obtient que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = h(x - y)\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}.$$

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & h(x - y)\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{array}.$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ car h et exp le sont. Déterminons ses dérivées partielles premières. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h'(x - y)\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} + h(x - y)\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\left(h'(x - y) + \frac{h(x - y)}{2}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -h'(x - y)\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} + h(x - y)\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\left(-h'(x - y) + \frac{h(x - y)}{2}\right).$$

On effectue alors la somme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\,h(x - y) = f(x, y).$$

Donc f est solution de E. En conclusion, l'ensemble des solutions de E est

$$\left\{ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & h(x - y)\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{array} \,\middle|\, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

Quelques vidéos pour se cultiver:
Introduction aux équations aux dérivées partielles :
But what is a partial differential equation? - - 3Blue1Brown

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !