EXERCICES — CHAPITRE 33

Exercice 1 (♣) –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. Montrer que
$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur l'espace $E = \mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$.
3. Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f,g \in E$, on pose
$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2 (♣) – Pour $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A,B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
$$(\operatorname{tr}(AB))^2 \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2\right)\operatorname{tr}\left(B^2\right)$$

Exercice 3 (♣) – Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Établir
$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$$

Exercice 4 (♥) – Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait
$$(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y).$$
Montrer que f est un endomorphisme de E.

Exercice 5 (♠) – Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que
$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2.$$
Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ constitue une base orthonormée de E.

Exercice 6 (♥) – Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que
$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid f(y)).$$
Montrer
$$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}.$$

Exercice 7 (♥) – Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$
Préciser les cas d'égalité.

Exercice 8 (♥) – On considère $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire
$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Pour f strictement positive sur $[a;b]$ on pose
$$\ell(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$
Montrer que $\ell(f) \geqslant (b-a)^2$.
Étudier les cas d'égalités.

Exercice 9 (♦) – Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice réelle vérifiant
$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, a_{i,i} \geqslant 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1.$$

1. Montrer
$$\forall X \in RR^n \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0.$$
2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 10 (♥) – On munit $\mathcal{M}_n($
$RR)$ du produit scalaire défini par

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}\left({}^t AB\right).$$

1. Montrer que la base canonique $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.
2. Observer que les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Établir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\operatorname{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}\left({}^t AA\right)}$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 11 (♣) – Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1,0,1),\ v = (1,1,1),\ w = (-1,1,0)$$

Exercice 12 (♦) –

1. Énoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13 (♥) – On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(u,F)$ où $u = (1,2,3,4)$.

Exercice 14 (♦) – On munit $E = \mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

1. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.
2. Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \operatorname{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).
3. Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Exercice 15 (♦) – Soient n un entier supérieur à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur E.

2. Calculer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \left(at^2+bt+c\right)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Exercice 16 (♠) – *(Déterminant de Gram)*
Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ famille de vecteurs de E, on note $G\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $\langle u_i, u_j\rangle$.

1. Montrer que si la famille $\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ est liée alors

$$\det G\left(u_1,\ldots,u_p\right) = 0.$$

2. Établir la réciproque.
3. Montrer que si $\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E alors pour tout $x \in E$,

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{\det G\left(e_1,\ldots,e_p,x\right)}{\det G\left(e_1,\ldots,e_p\right)}}.$$

Exercice 17 (♠) – *Méthode des moindres carrés*
Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leqslant n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\left\{\|AX-B\|; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^T AX = A^T B.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\left\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !

♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !