EXERCICES — CHAPITRE 33

Solution 1 –

1. Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $\varphi(P,P)=0$ alors
   $$\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$$
   donc
   $$\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, P(k)=0.$$
   Ainsi P admet au moins $n+1$ racines, or $\deg P \leqslant n$ donc $P=0$.
2. Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.
   Si $\varphi(f,f)=0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, on a pour tout $t \in [-1;1]$, $f(t)^2\left(1-t^2\right)=0$ et donc pour tout $t \in]-1;1[$, $f(t)=0$. Par continuité de f en 1 et -1 , on obtient $f(t)=0$ sur $[-1;1]$. On peut alors conclure que φ est un produit scalaire.
3. φ est clairement une forme bilinéaire symétrique.
   On a aussi $\varphi(f,f) \geqslant 0$ et
   $$\varphi(f,f)=0 \Longrightarrow f(0)=0 \text{ et } f'=0$$
   car f'^2 est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit
   $$\varphi(f,f)=0 \Longrightarrow f=0.$$

Solution 2 –

1. On vérifie facilement que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit une forme bilinéaire symétrique. Reste à démontrer qu'elle est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $\left(b_{i,j}\right)=A^T A$. Alors
   $$b_{i,i}=\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0.$$
   Ainsi,
   $$\operatorname{tr}\left(A^T A\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0.$$
   On a bien affaire à une forme positive. De plus, si $\langle A,A\rangle=0$, alors pour tout $i=1,\dots,n$ et tout $k=1,\dots,n$, on a $a_{k,i}=0$, et donc $A=0$: la forme est définie.
2. On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour A,B symétriques, on a en effet
   $$\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(AB)$$
   et donc
   $$(\operatorname{tr}(AB))^2 \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2\right)\operatorname{tr}\left(B^2\right).$$

Solution 3 – En développant le produit scalaire
$$\left\|\frac{x}{\|x\|^2}-\frac{y}{\|y\|^2}\right\|^2=\frac{1}{\|x\|^2}-2\frac{(x\mid y)}{\|x\|^2\|y\|^2}+\frac{1}{\|y\|^2}=\left(\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}\right)^2$$
Les quantités considérées étant positives, on a bien le résultat voulu.

Solution 4 – Soient x, x', $y \in E$ et $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}\left(f\left(\lambda x+\lambda' x'\right)\mid f(y)\right)&=\left(\lambda x+\lambda' x'\mid y\right)\\&=\lambda(x\mid y)+\lambda'\left(x'\mid y\right)\\&=\lambda(f(x)\mid f(y))+\lambda'\left(f\left(x'\right)\mid f(y)\right)\\&=\left(\lambda f(x)+\lambda' f\left(x'\right)\mid f(y)\right)\end{aligned}$$
donc
$$f\left(\lambda x+\lambda' x'\right)-\left(\lambda f(x)+\lambda' f\left(x'\right)\right)\in(\operatorname{Im} f)^{\perp}=E^{\perp}=\{0\}$$
d'où la linéarité de f.
En fait, l'hypothèse de surjectivité n'est pas nécessaire pour résoudre cet exercice mais permet un « argument rapide ».

Solution 5 – Pour $j \in \{1,\dots,n\}$,
$$\left\|e_j\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left(e_i\mid e_j\right)^2$$
donc $\left(e_i\mid e_j\right)=0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est orthonormée. Si la famille ($e_1,e_2,\dots,e_n$) n'est pas une base, on peut déterminer $e_{n+1}\in E$ tel que $(e_1,e_2,\dots,e_n,e_{n+1})$ soit libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut se ramener au cas où
$$e_{n+1}\in \operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n)^{\perp}.$$
Mais alors
$$\|e_{n+1}\|^2=\sum_{i=1}^{n}(e_i\mid e_{n+1})^2=0$$
ce qui est contradictoire.
Par suite la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base orthonormée.

Solution 6 – Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors

$$\forall z \in \operatorname{Ker} f, (y \mid z) = (f(x) \mid z) = (x \mid f(z)) = (x \mid 0) = 0$$

donc $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$ puis $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ par égalité des dimensions (théorème du rang et le fait qu'un sous-espace vectoriel et son orthogonal sont supplémentaires).

Solution 7 – Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}}\sqrt{x_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\sum_{k=1}^n x_k.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il y a colinéarité des n-uplets

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \text{ et } \left(\sqrt{x_1},\dots,\sqrt{x_n}\right)$$

ce qui correspond au cas où

$$\frac{\sqrt{x_1}}{1/\sqrt{x_1}} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{1/\sqrt{x_n}}$$

soit encore

$$x_1 = \dots = x_n = 1/n.$$

Solution 8 – Soit $g \in \mathcal{C}([a;b],$
$RR)$ l'application définie par $g(t) = \sqrt{f(t)}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b g(t)\cdot\frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \ell(f)$$

Il y a égalité si, et seulement si, $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{g(t)}$ sont colinéaires ce qui correspond à f constante.

Solution 9 –

1. En notant $X = (x_1,\dots,x_n)$, on obtient

$$^tXAX = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_ix_j$$

et donc

$$^tXAX = \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \sum_{j=1,j\neq i}^n \left|a_{i,j}\right|\left|x_j\right|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1,j\neq i}^n \left|a_{i,j}\right|\left|x_j\right|\right)^2}$$

et une nouvelle fois

$$\left(\sum_{j=1,j\neq i}^n \left|a_{i,j}\right|\left|x_j\right|\right)^2 \leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1,j\neq i}^n x_j^2 \leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

On obtient donc

$$\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}^2 < \sum_{i=1}^n x_i^2$$

puis

$$^tXAX > \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0.$$

2. Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors $^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ en vertu de ce qui précède. Ainsi le noyau de A est réduit au vecteur nul. Le rang de A est donc maximal et A est donc inversible.

Solution 10 –

1. Pour $i,j,k,\ell \in [\![1,n]\!]$, on a $\left(E_{i,j} \mid E_{k,\ell}\right) = \operatorname{tr}\left(E_{j,i}E_{k,\ell}\right) = \operatorname{tr}\left(\delta_{i,k}E_{j,\ell}\right) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.
2. Pour $A \in \mathcal{S}_n($
$RR)$ et $B \in \mathcal{A}_n($
$RR)$,

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right) = \operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}\left(A^tB\right) = -\operatorname{tr}\left({}^tBA\right) = -(B \mid A)$$

donc $(A \mid B) = 0$ et l'orthogonalité des espaces. Leur supplémentarité est connue.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne
$$|(I_n \mid A)| \leqslant \|I_n\| \, \|A\|$$
d'où
$$\operatorname{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}\left({}^tAA\right)}$$
avec égalité si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) \geqslant 0$ et (A, I_n) liée, i.e. $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Solution 11 – On obtient la famille (e_1, e_2, e_3) avec
$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_2 = (0,1,0) \text{ et } e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Solution 12 –

1. cf. cours!
2. Au terme des calculs, on obtient la base (P_0, P_1, P_2) avec
$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, P_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X \text{ et } P_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Solution 13 –

1. Soient
$$H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\right\}$$
et
$$K = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t = 0\right\}.$$
On a $F = H \cap K$ puis $F^\perp = H^\perp + K^\perp$. Soient $n = (1,1,1,1)$ et $m = (1,-1,1,-1)$ des vecteurs normaux à H et K. Par Schmidt
$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$
forment une base orthonormée de $F^\perp$.
2. On peut facilement former $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(p_{F^\perp}\right)$ car
$$\forall x \in E, p_{F^\perp}(x) = (x \mid e_1)\, e_1 + (x \mid e_2)\, e_2$$
donc
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(p_F\right) = I_4 - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(p_{F^\perp}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Pour $u = (1,2,3,4)$, $p_F(u) = (-1,-1,1,1)$ donc
$$d(u,F) = \left\|u - p_F(u)\right\| = \sqrt{4+9+4+9} = \sqrt{26}$$

Solution 14 –

1. Si $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ alors le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul et par conséquent $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est donc libre. Elle n'est pas orthogonale puisque $(P_0 \mid P_2) = 1/3 \neq 0$.
2. $$\begin{aligned} &R_0 = P_0, \|R_0\| = 1, Q_0 : x \mapsto 1 \\ &(P_0 \mid P_1) = 0, R_1 = P_1, \|R_1\| = 1/\sqrt{3}, Q_1 : x \mapsto \sqrt{3}x. \\ &R_2 = P_2 + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1. \\ &(R_2 \mid R_0) = 0 \text{ donne } \lambda_0 = -(P_2 \mid P_0) = -1/3, \\ &(R_2 \mid R_1) = 0 \text{ donne } \lambda_1/3 = -(P_2 \mid R_1) = 0. \\ &R_2 : x \mapsto x^2 - 1/3, \|R_2\| = \frac{2}{3\sqrt{5}}, Q_2 : x \mapsto \frac{\sqrt{5}}{2}\left(3x^2 - 1\right). \end{aligned}$$
3. Le projeté orthogonal de P_3 sur F est
$$R = (Q_0 \mid P_3)\, Q_0 + (Q_1 \mid P_3)\, Q_1 + (Q_2 \mid P_3)\, Q_2$$
soit, après calculs
$$R : x \mapsto \frac{3}{5}x.$$
La distance de P_3 à F est alors
$$d = \|P_3 - R\| = \frac{2}{5\sqrt{7}}$$

Solution 15 –

1. Symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P,P) = 0$ alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\, \mathrm{d}t = 0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)
$$\forall t \in [-1;1], P(t) = 0.$$
Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

2. On a
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_{-1}^{1}\left(t^3-\left(at^2+bt+c\right)\right)^2\mathrm{d}t = d\left(X^3,F\right)^2$$
où $F=\mathrm{Vect}\left(1,X,X^2\right)$.
Soit P le projeté orthogonal de X^3 sur F. On peut écrire $P=a+bX+cX^2$ et on a par orthogonalité
$$\left(X^3-P\mid 1\right)=\left(X^3-P\mid X\right)=\left(X^3-P\mid X^2\right)=0.$$
On en déduit que $P=\frac{3}{5}X$ puis
$$d\left(X^3,F\right)^2=\frac{8}{175}.$$

Solution 16 –

1. Si la famille $\left(u_1,\dots,u_p\right)$ est liée alors il existe $\left(\lambda_1,\dots,\lambda_p\right)\neq(0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i=0_E$ et on observe alors $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i=0$ en notant $L_1,\dots,L_n$ les lignes de la matrice $G\left(u_1,\dots,u_p\right)$.
On conclut $\det G\left(u_1,\dots,u_p\right)=0$.
2. Si $\det G\left(u_1,\dots,u_p\right)=0$ alors il existe $\left(\lambda_1,\dots,\lambda_p\right)\neq(0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i=0$ et on obtient alors que le vecteur $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i$ est orthogonal à tout u_j, c'est donc un vecteur commun à $\mathrm{Vect}\left(u_1,\dots,u_p\right)$ et à son orthogonal, c'est le vecteur nul.
On conclut que la famille ($u_1,\dots,u_p$) est liée.
3. $x=u+n$ avec $u\in F$ et $n\in F^{\perp}$. En développant $\det G\left(e_1,\dots,e_p,x\right)$ selon la dernière colonne :
$$\det G\left(e_1,\dots,e_p,u+n\right)=\det G\left(e_1,\dots,e_p,u\right)+\begin{vmatrix} G\left(e_1,\dots,e_p\right) & 0\\ * & \|n\|^2\end{vmatrix}$$
or $\det G\left(e_1,\dots,e_p,u\right)=0$ car la famille est liée et donc
$$\det G\left(e_1,\dots,e_p,x\right)=\|n\|^2\det G\left(e_1,\dots,e_p\right)$$
avec $\|n\|=d(x,F)$.

Solution 17 –

1. Puisque A est de rang p, l'application $X\mapsto AX$ qui va de $\mathcal{M}_{p,1}($
$RR)$ dans $\mathrm{Im}(A)$ est injective. Or, $\inf\left\{\|AX-B\|;X\in\mathcal{M}_{p,1}(RR)\right\}$ est la distance de B à $\mathrm{Im}(A)$. Cette distance est atteinte uniquement au projeté orthogonal sur $\mathrm{Im}(A)$ (qui est de dimension finie) de B. Ce projeté orthogonal s'écrit de façon unique AX_0.
2. On a
$$\begin{aligned} AX_0=p_{\mathrm{Im}(A)}(B) &\iff \forall Z\in\mathrm{Im}(A),\ AX_0-B\perp Z\\ &\iff \forall X\in\mathcal{M}_{p,1}(\\ RR),\ AX_0-B\perp AX&\\ &\iff \forall X\in\mathcal{M}_{p,1}(\\ RR),\ (AX)^T\left(AX_0-B\right)=0&\\ &\iff \forall X\in\mathcal{M}_{p,1}(\\ RR),\ X^T\left(A^TAX_0-A^TB\right)=0&\\ &\iff A^TAX_0=A^TB\end{aligned}$$
X_0 est donc bien l'unique solution de $A^TAX=A^TB$.
3. Posons $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. On vérifie facilement que le rang de A est 2 . La borne inférieure est donc atteinte en $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ solution de $A^TAX_0=A^TB$. Or
$$A^TA=\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix},\ A^TB=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}.$$
On résout alors l'équation et on trouve que $x_0=-1/2$ et $y_0=0$, et donc l'inf recherché vaut $7/2$.

♣ Du trèfle à brouter… ♠ Qui s'y frotte s'y pique !

♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !