

EXERCICES — CHAPITRE 32

Exercice 1 (♣) –

- Soit $n \geq 4$ et $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts. Que vaut $(ab) \circ (cd) \circ (da)$?
- Que dire d'une permutation de S_n possédant au moins $n - 1$ points fixes.
- Une permutation $s \neq Id$ telle que $s^2 = Id$ est-elle nécessairement une transposition ?
- Énumérer tous les éléments de S_4 .

Exercice 2 (♥) – Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer l'ordre de σ , la signature de σ , calculer σ^{100} :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (♥) – Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
- Donner la signature de σ .
- Décomposer σ en produit de transpositions.
- Calculer σ^{2001} .

Exercice 4 (♠) – Pour $n \geq 1$, on note \mathcal{A}_n l'ensemble des éléments de S_n de signature égale à 1. \mathcal{A}_n est appelé le groupe alterné d'indice n .

- Démontrer que \mathcal{A}_n est un sous-groupe de S_n .
- Énumérer tous les éléments de \mathcal{A}_3 , de \mathcal{A}_4 .
- On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de S_n . Démontrer que $\phi : S_n \rightarrow S_n, \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection. En déduire le cardinal de \mathcal{A}_n .

Exercice 5 (♣) – Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 (♥) – Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{vmatrix} j & j \\ -1 & j \end{vmatrix}; & 2. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; & 3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \\ 4. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; & 5. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}; & 6. \begin{vmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix}; \\ 7. \begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}; & 8. \begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}; & 9. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \\ 10. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}; & 11. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}; & 12. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 5 & 2 \end{vmatrix}. \end{array}$$

Exercice 7 (♥) – Calculer les déterminants (les factoriser au maximum, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 8 (♥) – Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $M_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 9 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de A lorsque n est impair. Ce résultat est-il valable lorsque n est pair ?

Exercice 10 (♠) – Calculer le déterminant de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}$$

On précise que $D_1 = 1$.

Exercice 11 (♥) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose le déterminant de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

On précise que $D_1 = 3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$
2. En déduire l'expression de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 (♠) – Calculer le déterminant de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

où $x \in \mathbb{R}$. On précise que $\Delta_1 = 1 + x^2$.

Exercice 13 (Déterminant de Vandermonde) (♠) – Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Exercice 14 (♣) –

1. La famille $((1, 3, 2), (1, 2, -1), (0, 1, 3))$ est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?
2. La famille $((1, -i, -1), (i, 1, -i), (-1, i, 1))$ est-elle une base de \mathbb{C}^3 ?
3. La famille $(1 + X - X^2, 3 - X + 5X^2, -1 + 2X + 3X^2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 15 (♥) –

1. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles la famille $((m + 1, m - 1); (4, m - 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles la famille $((m, m + 1, 1); (4, m - 1, 0); (1, 2, m))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 16 (♥) – Calculer le déterminant de l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1) \end{aligned}$$

Qu'en déduit-on sur f ?

Exercice 17 (♠) – Soit λ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (X - 1)^2 P'' + (\lambda X + 1)P' + P \end{aligned}$$

Donner une CNS sur λ pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 18 (Réduction complète d'un endomorphisme en dimension 2) (♠) – Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . On appelle trace de A l'élément de \mathbb{K} défini par : $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. Nous avons montré que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. (TD Matrices)

1. Montrer que si M et N sont deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, alors $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$.
2. On définit l'application $f: \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$ par $P \mapsto (-29 - 31X)P(0) + (12 + 13X)P(1)$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ (on ne demande pas de le montrer). Écrire sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. On cherche désormais une base de $\mathbb{R}_1[X]$ telle que f ait une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans cette base (avec $\lambda \geq \mu$)
 - (a) Justifier que si D existe, $\det(D) = \det(A)$
 - (b) En déduire les valeurs possibles de λ et μ .
 - (c) Résoudre $f(P) = \lambda P$ et $f(P) = \mu P$ dans $\mathbb{R}_1[X]$.
 - (d) En déduire la base recherchée et conclure.

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!