

EXERCICES — CHAPITRE 32

Solution 1 –

- On cherche l'image de chaque élément. Les éléments différents de a, b, c, d ne sont pas modifiés.
La permutation est donc un cycle de longueur 4, $(a c d b)$.
- Une permutation étant une bijection, le dernier élément de $\{1, \dots, n\}$ ne peut être envoyé que sur lui-même. Une telle permutation est donc nécessairement l'identité.
- Non, du moins si $n \geq 4$. En effet, la composée de deux transpositions à support disjoint vérifie elle-même que $s^2 = Id$.
- Pour énumérer tous les éléments de S_4 , on peut partir du fait qu'une permutation se décompose de manière unique en produit de cycles à supports disjoints. On trouve alors que les permutations sont
 - l'identité (correspond à des produits de cycle de longueur 1);
 - les 4 cycles, ce sont :

$$(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432);$$

- les 3 cycles (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 3 par un cycle de longueur 1); ces 3 cycles sont

$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243).$$

- les transpositions (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 2 et de deux cycles de longueur 1), ces transpositions sont :

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34)$$

- les produits de deux transpositions à support disjoint (produit de deux cycles de longueur 2). Ces produits sont :

$$(12) \circ (34), (13) \circ (24), (14) \circ (23).$$

On a ainsi énuméré les 24 éléments de S_4 .

Solution 2 –

- On commence par étudier les images successives de 1. Ce sont 3, 4, 6. On étudie ensuite les images successives de 2. On trouve 5 (ensuite on revient à 2). On a épuisé tous les éléments de $1, \dots, 6$. La décomposition canonique de σ_1 en produits de cycles disjoints est

$$\sigma_1 = (1, 3, 4, 6) \circ (2, 5).$$

Pour décomposer σ_1 en produit de transpositions, il suffit de décomposer chacun des cycles en produits de transposition. Pour le second, c'est facile car il s'agit déjà d'une transposition. Pour le premier, on écrit

$$(1, 3, 4, 6) = (1, 3) \circ (3, 4) \circ (4, 6)$$

et donc

$$\sigma_1 = (1, 3) \circ (3, 4) \circ (4, 6) \circ (2, 5).$$

L'ordre du cycle $(1, 3, 4, 6)$ est 4, l'ordre du cycle $(2, 5)$ est 2, l'ordre de la permutation est donc le ppcm de 2 et 4, à savoir 4. En particulier, puisque $4 \mid 100$, on en déduit que $\sigma_1^{100} = Id$. Enfin, puisqu'on a décomposé σ_1 en produit de transpositions, il est facile de déterminer sa signature. Elle vaut

$$\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^4 = 1.$$

- Par la même méthode, on trouve

$$\sigma_2 = (1, 4, 7, 8) \circ (2, 6, 5) \circ (3, 9),$$

$$\sigma_2 = (1, 4) \circ (4, 7) \circ (7, 8) \circ (2, 6) \circ (6, 5) \circ (3, 9).$$

L'ordre de σ_2 est le ppcm de 4, 3 et 2, soit 12. La signature de σ_2 est $(-1)^6 = 1$. Enfin, puisque $100 \equiv 0[2], 100 \equiv 1[3]$ et $100 \equiv 0[4]$, on en déduit que

$$\sigma_2^{100} = (2, 6, 5)^1 = (2, 6, 5).$$

Solution 3 –

- On cherche l'orbite de 1. On trouve 3, 6, 2, 5, 4 n'est pas dans l'orbite de 1, on cherche son orbite. On trouve 7. Tous les éléments de $\{1, \dots, 7\}$ étant couverts, la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints est

$$\sigma = (1 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5) \circ (4 \ 7).$$

- La signature du 5-cycle $(1\ 3\ 6\ 2\ 5)$ est $(-1)^{5-1} = 1$. La signature de la transposition $(4\ 7)$ est -1 . La signature de σ est donc $1 \times (-1) = -1$.
- On va décomposer chaque cycle intervenant dans la décomposition de σ en produit de transpositions. Pour $(4\ 7)$, c'est déjà fait! Pour le 5-cycle, on a tout simplement

$$(13625) = (13) \circ (36) \circ (62) \circ (25),$$

d'où

$$\sigma = (13) \circ (36) \circ (62) \circ (25) \circ (47).$$

On peut alors retrouver que la signature de σ est égale à -1 .

- On remarque que $\sigma^{10} = Id$ (l'ordre de σ valant le ppcm de 2 et 5, soit 10). Ainsi, $\sigma^{2000} = (\sigma^{10})^{200} = Id$. Finalement, $\sigma^{2001} = \sigma$.

Solution 4 –

- D'abord, il est clair que $Id_{\{1, \dots, n\}}$ est un élément de \mathcal{A}_n . Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{A}_n$. Alors on a

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') = 1 \times 1 = 1,$$

et donc $\sigma\sigma' \in \mathcal{A}_n$. D'autre part, on a

$$\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(Id) = 1$$

et

$$\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma^{-1})$$

et donc $\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$ ce qui prouve que σ^{-1} est bien un élément de \mathcal{A}_n . On a donc bien vérifié que \mathcal{A}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n . Si on est un peu plus savant, on pouvait aussi remarquer que \mathcal{A}_n est le noyau de la signature, qui est un morphisme de groupe. A ce titre, \mathcal{A}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n .

- Les éléments de \mathcal{S}_3 sont :

- l'identité, qui est élément de \mathcal{A}_3 ;
- les transpositions, qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_3 ;
- les 3-cycles, (123) et (132) , qui sont éléments de \mathcal{A}_3 .

En particulier, \mathcal{A}_3 est constitué des 3 éléments décrits précédemment. Décrivons maintenant \mathcal{A}_4 : les éléments de \mathcal{S}_4 sont :

- l'identité, qui est élément de \mathcal{A}_4 ;

- les 4 cycles, qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_4 ;
- les 3 cycles, qui sont éléments de \mathcal{A}_4 ; ces 3 cycles sont

$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243).$$

- les transpositions (ou 2-cycles), qui ne sont pas éléments de \mathcal{A}_4 ;
- les produits de deux transpositions à support disjoint, qui sont éléments de \mathcal{A}_4 . Ces produits sont :

$$(12) \circ (34), (13) \circ (24), (14) \circ (23).$$

Ainsi, \mathcal{A}_4 est constitué des 12 éléments décrits ci-dessus.

- Puisque $\tau^2 = Id_{\{1, \dots, n\}}$, il est clair que $\phi \circ \phi = Id_{\mathcal{S}_n}$. Ainsi, ϕ est bijective, d'inverse $\phi^{-1} = \phi$. Puisque $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$, ϕ envoie \mathcal{A}_n sur $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$. Puisque ϕ est bijective, les cardinaux de \mathcal{A}_n et de $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ sont identiques. D'autres part, \mathcal{S}_n est la réunion disjointe de \mathcal{A}_n et de $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$, donc

$$\text{card}(\mathcal{S}_n) = \text{card}(\mathcal{A}_n) + \text{card}(\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n) = 2 \text{card}(\mathcal{A}_n).$$

Il vient $\text{card}(\mathcal{A}_n) = \frac{n!}{2}$.

Solution 5 –

- $D_1 = 1$.
- En développant par rapport à la deuxième ligne,

$$D_2 = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -17$$

- En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la dernière, on a

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -13 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

- En ajoutant les autres colonnes à la première, on ne change pas le déterminant. Donc

$$D_4 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

On enlève la première ligne à toutes les autres. Cela ne change pas non plus le déterminant.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne.

$$D_4 = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

On ajoute la première colonne aux deux autres.

$$D_4 = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Finalement, on développe par rapport à la deuxième ligne :

$$D_4 = 10 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-2) \cdot (-8) = 160$$

Solution 6 – On notera A, B , etc. la matrice qui intervient dans chaque question.

1. On a $\det(A) = j^2 + j = -1$ puisque $1 + j + j^2 = 0$.

$$2. \det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 15 = 45.$$

3. En commençant par échanger les deux premières colonnes, on obtient

$$\det(C) = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

4. On a

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -10 & 0 & -9 \\ -11 & 0 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -10 & -9 \\ -11 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = 29.$$

5. On a

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -5 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \times 2 = 14$$

6. On commence par factoriser la deuxième et la troisième ligne par 10 et 11 resp. :

$$\det(F) = 10 \times 11 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 110 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 110 \times 3 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 330 \times 14.$$

Et donc $\det(F) = 4620$

7. On commence par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$,

$$\begin{aligned} \det(G) &= \begin{vmatrix} 3 & 1-2i & 1+i \\ 3 & 1+i & 1+i \\ 3 & 1+i & 1-2i \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1-2i & 1+i \\ 1 & 1+i & 1+i \\ 1 & 1+i & 1-2i \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1-2i & 1+i \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 3i & -3i \end{vmatrix} \\ &= 3 \times \begin{vmatrix} 3i & 0 \\ 3i & -3i \end{vmatrix} = 27. \end{aligned}$$

8. On commence par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ et on utilise la relation $1 + j + j^2 = 0$,

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 0 & j^2 & j \\ 0 & 1 & j^2 \\ 0 & j & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

9. On note M cette matrice (pour éviter de l'appeler $I!$). On a

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

10. En commençant par factoriser la deuxième colonne par 2 :

$$\begin{aligned} \det(J) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -4 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 12 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 12 & 9 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 19 & 13 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 19 & 13 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ en faisant } C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ &= -15. \end{aligned}$$

11. On commence par factoriser la deuxième colonne par 2 :

$$\begin{aligned} \det(K) &= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times \begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} -5 & 4 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times \begin{vmatrix} 4 & -16 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = -2 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = -8 \times (-1) = 8. \end{aligned}$$

12. Méthode 1. On a

$$\begin{aligned} \det(L) &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & -18 & 9 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 6 & -3 \\ -4 & 2 & -3 \\ -18 & 9 & -6 \end{vmatrix} \\ &= (-3)^2 \times \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} \text{ en factorisant } L_1 \text{ et } L_3 \text{ par } -3 \\ &= 9 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -2 & \boxed{1} \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \text{ en factorisant la 1ère colonne par 2} \\ &= 18 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \times \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

car les deux colonnes sont proportionnelles.

Méthode 2. On a $C_1 - C_2 = 2C_3$, d'où $\det(L) = 0$.

Solution 7 –

1. On enlève la première colonne aux autres, puis on développe (1ère ligne)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

Par linéarité, on sort un $(b-a)$ de la première colonne et un $(c-a)$ de la deuxième :

$$D_1 = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2. On ajoute les autres lignes à la première, puis on soustrait la première colonne aux autres.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -b-a-c & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice diagonale donc $D_2 = (a+b+c)^3$.

3. On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$, qui ne change pas le déterminant, puis on utilise la linéarité par rapport à la première colonne

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2a & b+c & c+a \\ 2a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ 2a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 1 & b+c & c+a \\ a & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^2 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - aC_1$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ et linéarité.

$$D_3 = 2a \begin{vmatrix} 1 & b+c & c \\ a & b^2+c^2 & c^2 \\ a^2 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

on reconnaît D_1 , donc $D_3 = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

4. $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, puis on enlève L_1 aux autres lignes

$$D_4 = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & b & a & d \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & 0 & a-c & 0 \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

Développement par rapport à la première colonne, puis la deuxième ligne.

$$D_4 = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ 0 & a-c & 0 \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-c) \begin{vmatrix} a-b & c-d \\ c-b & a-d \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$D_4 = (a+b+c+d)(a-c) \begin{vmatrix} a-b & c-d \\ c-a & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-c)^2 \begin{vmatrix} a-b & c-d \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Finalement $D_4 = (a+b+c+d)(a-c)^2(a-b+c-d)$.

Solution 8 – En développant par rapport à la dernière ligne, on pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(M_t) &= (t-4) \begin{vmatrix} t-2 & 4 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} \\ &= (t-4)((t-2)(t+1) - 4) \\ &= (t-4)(t^2 - t - 6) \\ &= (t-4)(t+2)(t-3) \end{aligned}$$

M_t est inversible si et seulement si $\det(M_t) \neq 0$, c'est à dire si et seulement si $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3, 4\}$.

Solution 9 – A est antisymétrique, donc ${}^t A = -A$. Alors, en passant au déterminant, on a

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \det(-A) \\ \det(A) &= (-1)^n \det(A) \end{aligned}$$

Donc, lorsque n est impair, on a $\det(A) = -\det(A)$ et donc $\det(A) = 0$.

Cela ne peut s'appliquer lorsque n est pair, car la relation précédente donne dans ce cas $\det(A) = \det(A)$.

Solution 10 – On remarque que $D_1 = 1$ et que $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Soit $n \geq 2$.

En développant D_n par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$D_n = (-1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & \ddots & & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}$$

où les deux déterminants sont de taille $n-1$. On remarque que le premier est triangulaire et que le deuxième est D_{n-1} . On en déduit donc que

$$D_n = -1 + D_{n-1}.$$

D_n est donc une suite arithmétique de raison -1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D_n = 2 - n$.

Solution 11 –

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en développant par rapport à la première colonne (on inscrit en indice la taille du déterminant) :

$$D_{n+2} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n+1} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n+1}$$

On reconnaît D_{n+1} dans le premier terme et on développe le second par rapport à la première ligne :

$$D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}_n = 3D_{n+1} - 2D_n$$

2. Cette relation de récurrence a pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les solutions sont 1 et 2. Donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \alpha + \beta 2^n$$

En utilisant que $D_1 = 3$ et $D_2 = 7$, on trouve $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = 2^{n+1} - 1$$

Solution 12 – On remarque que

$$\Delta_1 = 1 + x^2$$

$$\Delta_2 = (1 + x^2)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1.$$

Soit $n \geq 2$. Alors, en développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\Delta_n = (1 + x^2) \begin{vmatrix} 1 + x^2 & x & & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & x & 1 + x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & x & & 0 \\ 0 & 1 + x^2 & \ddots & \\ & x & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots & x \\ & & & x & 1 + x^2 \end{vmatrix}$$

où les deux déterminants sont de taille $n-1$. Le premier est Δ_{n-1} . On développe le second par rapport à sa première colonne :

$$\Delta_n = (1 + x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}.$$

On peut utiliser la méthode pour trouver le terme général d'une suite récurrente d'ordre 2, nous proposons une solution un peu plus astucieuse.

En effet, la relation de récurrence peut se réécrire

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2} = x^2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}).$$

Pour tout $n \geq 2$, on pose $A_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. On a alors pour tout $n \geq 3$, $A_n = x^2 A_{n-1}$, et A est une suite géométrique de raison x^2 . D'où, pour tout $n \geq 3$,

$$A_n = x^{2n-2} A_2 = x^{2n-4} (\Delta_2 - \Delta_1) = x^{2n}.$$

Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\Delta_n = x^{2n} + \Delta_{n-1}$$

Et donc Δ_n est la somme d'une suite géométrique de raison x^{2n} , d'où l'on déduit que

$$\Delta_n = \sum_{k=2}^n x^{2k} + \Delta_1 = \sum_{k=2}^n x^{2k} + 1 + x^2 = \sum_{k=0}^n x^{2k}.$$

Finalement, si $x \in \{-1, 1\}$, on a $\Delta_n = n + 1$ et sinon on a

$$\Delta_n = \frac{1 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2}.$$

Solution 13 – On commence par chercher une relation de récurrence. En faisant l'opération $C_j \leftarrow C_j - a_1 C_{j-1}$ pour j allant de n à 2 (dans cet ordre!), on obtient

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

La dernière égalité provient du fait que pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la ligne i se factorise par $(a_i - a_1)$ puis de la linéarité du déterminant par rapport aux lignes.

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{2 \leq k \leq n} (a_k - a_1) \times V(a_2, \dots, a_n). \quad (\star)$$

Posons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

H_n : « pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ ».

Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$. On a $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ donc H_2 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que H_n soit vraie. Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors,

$$V(a_1, \dots, a_{n+1}) = \prod_{2 \leq k \leq n+1} (a_k - a_1) \times V(a_2, \dots, a_{n+1}) \quad \text{d'après } (\star)$$

$$= \prod_{2 \leq k \leq n+1} (a_k - a_1) \times \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \quad \text{d'après } H_n$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i).$$

Donc H_{n+1} est vraie, et on conclut par récurrence.

Solution 14 – Il s'agit à chaque fois de calculer le déterminant de la famille dans la base canonique.

1. Par l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

car deux colonnes sont identiques. La famille n'est donc pas une base de \mathbb{R}^3 .

2. Le troisième vecteur est l'opposé du premier, donc la famille n'est pas libre. Ce n'est pas une base de \mathbb{C}^3 .

3. En utilisant le premier 1 comme pivot, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -32$$

Comme le déterminant est non-nul, $(1 + X - X^2, 3 - X + 5X^2, -1 + 2X + 3X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Solution 15 –

1. Soit m un réel. Alors, en notant \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a

$$\det_{\mathcal{B}}((m+1, m-1); (4, m-1)) = \begin{vmatrix} m+1 & 4 \\ m-1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1) \begin{vmatrix} m+1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)(m-3)$$

Or, une famille est une base d'un espace vectoriel si et seulement si son déterminant dans une base quelconque de cet espace est non-nul. D'où

$((m+1, m-1); (4, m-1))$ est une base de \mathbb{R}^2 si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

2. Soit m un réel. On note \mathcal{F} la famille de l'énoncé. Alors, en notant \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \begin{vmatrix} m & 4 & 1 \\ m+1 & m-1 & 2 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} m-1 & 4 & 1 \\ m-1 & m-1 & 2 \\ 1-m & 0 & m \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ -1 & 0 & m \end{vmatrix} \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & m-5 & 1 \\ 0 & 4 & m+1 \end{vmatrix} \\ &= (m-1)((m-5)(m+1) - 4) \\ &= (m-1)(m^2 - 4m - 9) \\ &= (m-1)(m - (2 - \sqrt{13}))(m - (2 + \sqrt{13})) \end{aligned}$$

\mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2 + \sqrt{13}; 2 - \sqrt{13}\}$.

Solution 16 – On commence par calculer les images des vecteurs de la base canonique :

$$\begin{aligned} f(1) &= X^3 - 1 & f(X) &= X^3 + X - 1 \\ f(X^2) &= X^3 + 2X^2 + 4X - 1 & f(X^3) &= 4X^3 + 12X^2 + 12X - 1 \end{aligned}$$

Donc la matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On calcule alors le déterminant de f (en effectuant $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$) :

$$\det(f) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

car on a reconnu une matrice triangulaire.

Comme il est non-nul, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution 17 – On écrit la matrice de f dans b la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$f(1) = 1, \quad f(X) = (\lambda + 1)X + 1, \quad f(X^2) = (2\lambda + 3)X^2 - 2X + 2,$$

$$M_b(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda + 3 \end{pmatrix}. \text{ Alors,}$$

f est un automorphisme $\Leftrightarrow \det(M_b(f)) \neq 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda + 3 \end{vmatrix} &\neq 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda + 1)(2\lambda + 3) &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{-3}{2}\right\}$.

Solution 18 – Rappel de la formule de la trace :

On note $C = AB$ et $D = BA$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}.$$

Donc $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$. De même, on a

$$d_{i,i} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}.$$

Donc

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{i,k}$$

Il suffit alors d'échanger les noms de k et i pour obtenir

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \text{Tr}(AB).$$

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si b et b' sont deux bases de E et $M = M_b(f)$, $N = M_{b'}(f)$. Alors, en notant $P = \mathcal{P}(b, b')$, on a $N = P^{-1}MP$. En utilisant le début de l'exercice,

$$\text{Tr}(N) = \text{Tr}(P^{-1}MP) = \text{Tr}(PP^{-1}M) = \text{Tr}(M).$$

2. $f(1) = (-29 - 31X) + (12 + 13X) = -17 - 18X$ et $f(X) = (12 + 13X)$, donc la matrice de P dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -17 & 12 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}$.

3. (a) Si D existe, alors D et A représentent l'endomorphisme f dans des bases différentes. Le cours nous assure que dans ce cas, elles ont le même déterminant.
 (b) Si D existe, on a donc

$$\lambda\mu = \det(A) = -17 \times 13 + 18 \times 12 = -18 \times 13 + 13 + 18 \times 13 - 18 = -5$$

D'après la question 1, si D existe, alors sa trace est la même que la trace de A . On doit donc avoir $\lambda + \mu = -17 + 13 = -4$

Les solutions du système $\begin{cases} \lambda\mu = -5 \\ \lambda + \mu = -4 \end{cases}$ sont les couples $(1, -5)$ et $(-5, 1)$. Comme l'énoncé impose $\lambda \geq \mu$, les seules valeurs possibles sont donc $\lambda = 1$ et $\mu = -5$.

- (c) Soit $P = a + bX$. Alors

$$\begin{aligned} f(P) = P &\iff (-29 - 31X)a + (12 + 13X)(a + b) = a + bX \\ &\iff \begin{cases} -29a + 12(a + b) &= a \\ -31a + 13(a + b) &= b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -18a + 12b &= 0 \\ -18a + 12b &= 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda + \frac{3\lambda}{2}X \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des polynômes invariants par f est $\text{Vect}(2X + 3)$.

$$\begin{aligned} f(P) = -5P &\iff (-29 - 31X)a + (12 + 13X)(a + b) = -5a - 5bX \\ &\iff \begin{cases} -29a + 12(a + b) &= -5a \\ -31a + 13(a + b) &= -5b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -12a + 12b &= 0 \\ -18a + 18b &= 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda + \lambda X \end{aligned}$$

Donc les solutions de $f(P) = -5P$ sont les éléments de $\text{Vect}(1 + X)$

- (d) Les polynômes $2X + 3$ et $1 + X$ ne sont pas colinéaires, donc la famille $\mathcal{F} = (2X + 3, 1 + X)$ est libre. Comme elle est de cardinal 2 et que $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension 2, c'est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. Enfin, on a vu que $f(2X + 3) = 2X + 3$ et que $f(1 + X) = -5(1 + X)$, donc la matrice de f dans la base \mathcal{F} est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!