

EXERCICES — CHAPITRE 31

Exercice 1 (♣) – Un joueur lance un dé à six faces. Il perd un euro s'il fait 4, il gagne un euro s'il fait 1, 3 ou 6 et rien ne se passe sinon.

On note X le gain algébrique du joueur.

1. Expliciter les événements suivants :

$$\{X = 0\} \quad \{X = 2\} \quad \{X \leq 0\}$$

2. Déterminer la loi de X .
3. On pose $Y = 2X + 3$. Déterminer la loi de Y .
4. On pose $Z = X^2$. Déterminer la loi de Z .

Exercice 2 (♦) – On considère un dé à 12 faces truqué : quand on le lance, on a deux fois plus de chance de tomber sur une face portant un nombre pair que sur une face portant un nombre impair, les faces de même parité étant équiprobables. On lance une fois ce dé, et l'on considère le résultat obtenu.

On note $\Omega = \llbracket 1, 12 \rrbracket$ l'univers associé à cette expérience.

On note P la probabilité sur Ω associée à l'expérience.

1. En se basant sur la description du dé, expliciter la distribution de probabilité associée à P , autrement dit, déterminer $P(\{k\})$ pour tout $k \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$.
2. On note X la distance absolue à 6 du résultat du lancer. Par exemple, si l'on obtient 2 au lancer du dé, X prend la valeur 4. On pose aussi $Y = X^2 - 3X$. Déterminer la loi de X puis la loi de Y .

Exercice 3 (♣) – On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 0.5€. On lance ensuite deux dés non truqués. Si on obtient deux nombres 1, on reçoit 2€. Si on obtient deux nombres identiques mais différents de 1, on reçoit 1€ et sinon on ne reçoit rien. X est le gain algébrique.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $E(X)$.

Exercice 4 (♥) – Soient $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $P(X = k) = ak(n - k)$. Déterminer a pour que l'égalité précédente définisse bien la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 5 (♥) – Une urne contient quatre boules blanches et cinq boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X .
2. Donner la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

Exercice 6 (♣) – On dispose de deux urnes \mathcal{U} et \mathcal{V} . L'urne \mathcal{U} contient 3 boules noires et 2 boules blanches et l'urne \mathcal{V} contient 4 boules noires et 1 boule blanche.

1. On choisit une urne **au hasard** et on en extrait successivement trois boules, avec remise à chaque fois de la boule tirée. On note
 - \mathcal{U} l'évènement : « le tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{U} »,
 - \mathcal{V} l'évènement : « le tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{V} ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

- (a) Déterminer $P_{\mathcal{U}}(X = 0)$ et $P_{\mathcal{V}}(X = 0)$.
- (b) En déduire la probabilité $P(X = 0)$.

2. On choisit encore une urne au hasard et on en extrait successivement trois boules, cette fois **sans remise** de la boule tirée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

- (a) Déterminer $P_{\mathcal{U}}(Y = 3)$ et $P_{\mathcal{V}}(Y = 3)$.
- (b) En déduire la probabilité $P(Y = 3)$.

Exercice 7 (♣) – Dans chacun des cas ci-dessous, donner la loi de la variable aléatoire X .

1. On tire une boule au hasard dans une urne qui contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient une boule blanche et 0 si l'on obtient une boule noire.
2. On procède à 10 lancers d'un dé dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient un numéro pair.

Exercice 8 (♥) – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on lance n fois une pièce équilibrée, et on note X le nombre de "pile" obtenus. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de "pile" que de "face" ?

Exercice 9 (♥) – Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket -2, 2 \rrbracket)$.

1. Donner la loi de $Y = 1 - X$
2. Donner la loi de $Z = X^2$.

Exercice 10 (♥) – Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 3; 6 \rrbracket)$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X ; l'espérance et la variance de Y et enfin la loi de Y .

Exercice 11 (♠) – Des candidats (au nombre de n) n'ont pas soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de chercher à lire de tels brouillons, décide de noter au hasard, et indépendamment les unes des autres, les n copies en accordant une égale probabilité à toutes les notes entières possibles de 0 à 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Pour $k \in \llbracket 0; 20 \rrbracket$, calculer $P(X_n \leq k)$ et en déduire $P(X_n = k)$. Déterminer sa limite quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter.

2. Démontrer que $E(X_n) = 20 - \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{k+1}{21}\right)^n$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

Exercice 12 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n , on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et l'on effectue alors un second tirage. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux premier et second tirages.

1. Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de X_2 en fonction de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et démontrer que l'on a $2E(X_2) = 1 - n + (3n+1)S_n$. (indication : $k^2 = k^2 - n^2 + n^2$)

Exercice 13 (♥) – Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de « pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ (« pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n .

On suppose que les déplacements du mobile sont indépendants.

1. Donner $X_n(\Omega)$.

2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n . Démontrer que $X_n = 2D_n - n$ et en déduire, grâce à la loi de D_n , celle de X_n .

3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n .

4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

Exercice 14 (♥) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.

2. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs. Lorsque le joueur commence un niveau (ce qui suppose qu'il ait réussi les niveaux précédents), la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X , et calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X \geq k)$.

(b) En déduire que $E(X) = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Exercice 15 (♥) – Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elles souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1. (a) Reconnaître la loi de X_1 . Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1 . Donner $P(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.

(b) Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

(c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1 .

2. (a) Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.

(b) En déduire la probabilité $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.

(c) Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\frac{1}{81}$.

3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après 2c, on a $P(Z = 1) = \frac{1}{81}$. Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z .

4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

(a) Justifier que $P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$.

(b) En déduire $P(Y_1 = 0)$ puis $E(Y_1)$. On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.

(c) Exprimer Z en fonction de Y_1 , Y_2 et Y_3 . Calculer $E(Z)$ et vérifier que $E(Z) = \frac{211}{81}$.

Exercice 16 (♠) – On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n (respectivement Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la n -ième expérience, c'est-à-dire après le tirage d'une boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement : « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k -ième tirage ».

- (a) Justifier que $X_1(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Donner la loi de X_1 . Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
- (b) Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonction des événements B_1, B_2, R_1 et R_2 .
- (c) Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
- (a) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer l'événement $[X_n = 1]$ en fonction des événements B_1, B_2, \dots, B_n .
- (b) Montrer que $P([X_n = 1]) = \frac{1}{n+1}$. De même, calculer $P([X_n = n+1])$.
- (a) Établir pour tout entier $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, les égalités suivantes :

$$P_{[X_n=k-1]}([X_{n+1}=k]) = \frac{k-1}{n+2} \text{ et } P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=k]) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

- En déduire pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, une relation entre $P([X_{n+1}=k])$, $P([X_n=k])$ et $P([X_n=k-1])$.
- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi discrète uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Exercice 17 (♥) – On considère une urne contenant 6 boules. Il y a une boule numérotée "1", deux boules numérotées "2" et trois boules numérotées "3".

On tire simultanément au hasard deux boules (sans remise donc) dans l'urne. On note X le plus petit des deux nombres et Y le plus grand.

- Déterminer la loi conjointe de X et Y .
- En déduire les lois marginales de X et Y .
- Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 18 (♥) – On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On note D_1 et D_2 les résultats de chacun de ces dés.

- Déterminer les lois de D_1 et D_2 .
- On note $S = D_1 + D_2$. Déterminer la loi de S .
- On note $M = \max(D_1, D_2)$. Déterminer la loi de M .

Exercice 19 (♥) – Lorsque les éléphants sautent en parachute au dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis sur les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact au sol est notée p avec $p \in]0; 1[$ et les raquettes sont indépendantes.

- Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. On note X le nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de X .
- Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. On note Y le nombre de raquettes encore aux pattes à l'atterrissage. Établir la loi de Y .
- On suppose qu'un éléphant s'enlise s'il perd strictement plus de la moitié de son équipement. Comparer, en fonction de p , les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

Exercice 20 (♠) – Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$). Ces appels sont indépendants les uns des autres et, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant désiré est de $p \in]0, 1[$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

- Quelle est la loi de X .
- Après ces n appels, le secrétaire appelle une nouvelle fois toutes les personnes qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants atteints au total.

(a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n-k \rrbracket$, calculer $P_{\{X=k\}}(Y = \ell)$.

(b) Montrer que $\forall r \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, on a $\binom{n-k}{r-k} \binom{n}{k} = \binom{r}{k} \binom{n}{r}$.

(c) Déterminer la loi de Z .

Exercice 21 (♥) – On dispose d’un dé non pipé à 6 faces et de deux urnes : l’urne 1 contient 10 boules marquées des lettres A,B,C,D,E,F,G,H,I,J et l’urne 2 contient 10 boules marquées des lettres K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T. On réalise l’expérience suivante :

- On lance le dé et l’on note le numéro n obtenu.
- Si n est inférieur ou égal à 3, on tire une boule dans l’urne 1, et sinon, on tire une boule dans l’urne 2. On note la lettre lue sur la boule tirée.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le nombre n obtenu est impair et 0 sinon et l’on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la lettre tirée est une voyelle et 0 sinon. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire les lois de X et Y .

Exercice 22 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket^2$.

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. (a) Calculer $P(X = Y)$.
(b) En déduire $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
4. Déterminer la loi de $D = |X - Y|$.

Exercice 23 (♣) – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Déterminer les lois marginales.
2. Déterminer la loi de X sachant $\{Y = 0\}$ et la loi de Y sachant $\{X = 0\}$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
4. Montrer qu’elles sont dé-corrélées.

Exercice 24 (♠) – Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur l’espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Montrer que

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{V(X)V(Y)}.$$

Indication : On pourra étudier la variance de $Z = \lambda X + Y$ en fonction de λ .

Exercice 25 (♣) – Soit $p \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli telles que la loi du couple (X, Y) est donnée par

$Y \setminus X$	0	1
0	$\frac{1}{6} + p$	$\frac{1}{3} - p$
1	$\frac{1}{2} - p$	p

1. Que doit vérifier p pour que ce tableau définisse une loi conjointe?
2. Déterminer les lois marginales.
3. Calculer les espérances et les variances de X et de Y .
4. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
5. Pour quelle valeur de p les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 26 (♠) – Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules sont indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard dans l’urne, on note sa couleur et la remet dans l’urne avec c autres boules de la même couleur, c étant un entier strictement positif.

On répète n fois ce tirage suivant le même principe, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

On considère les variables aléatoires X_1, \dots, X_n définies par : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- ▷ $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i -ième tirage;
- ▷ $X_i = 0$ sinon.

On définit également pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable aléatoire Z_p par $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$.

1. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Que représente Z_p ? Déterminer $Z_p(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 et son espérance.
4. Déterminer la loi de Z_2 .
5. Soit $p \leq n - 1$.
(a) Déterminer $P_{\{Z_p=k\}}(X_{p+1} = 1)$ pour tout $k \in Z_p(\Omega)$.
(b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrez que

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c E(Z_p)}{2 + pc}.$$

- (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On raisonne par récurrence en considérant la propriété \mathcal{H}_p : « les variables aléatoires X_1, \dots, X_p suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ ». On calculera lors de l’hérédité $E(Z_p)$.

Exercice 27 (♥) – Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse. On souhaite estimer une valeur approchée de p .

Pour cela, on prélève n pièces. On suppose que la population des pièces est suffisamment grande pour que le prélèvement puisse être modélisé par une suite de n tirages successifs avec remise.

On note X_n le nombre de pièces défectueuses obtenues.

1. Quelle est la loi de X_n ? Donner son espérance et sa variance.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

3. En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Exercice 28 (♥) – Un exploitant agricole possède 100 vaches qui choisissent au hasard (et de manière indépendante) entre deux étables, qui contiennent chacune n places ($50 \leq n \leq 100$). Elles essaient ensuite de rentrer dans l'étable choisie. On suppose que les vaches sont indépendantes.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de vaches qui choisissent l'étable 1.

1. Donner la loi de X , ainsi que $E(X)$ et $V(X)$.

2. Soit E l'événement « chaque vache trouve une place ». Exprimer E à l'aide de X .

3. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place, avec une probabilité supérieure à 95%.

Exercice 29 (Inégalité de Cantelli) (♠) – Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\{X - E(X) \geq a\} \subset \{(X - E(X) + t)^2 \geq (a + t)^2\}.$$

2. En considérant la variable $X - E(X) + t$, montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(a + t)^2}.$$

3. Déterminer en quelle valeur le minimum de la fonction suivante est atteint :

$$f: \begin{array}{ll} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{t^2 + V(X)}{(a + t)^2} \end{array}$$

4. En déduire l'inégalité de Cantelli : $P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2 + V(X)}$.

5. Comparer l'information donnée par cette inégalité à celle donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

6. Déduire de 4. l'inégalité suivante : $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{a^2 + V(X)}$.

7. A nouveau, étudier l'intérêt de cette inégalité, en particulier par rapport à celle de Bienaymé-Tchebychev.

Quelques vidéos pour se cultiver:

Pour aller plus loin : Le théorème de la limite centrale.

 [Central Limit Theorem](#) - - [3Blue1Brown](#) 

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!