EXERCICES — CHAPITRE 31

Solution 1 – Précisons que $\Omega = [\![1,6]\!]$ et que P est la probabilité uniforme sur Ω.

1. $\{X=0\}=\{2,5\}$, $\{X=2\}=\emptyset$ et $\{X\leqslant 0\}=\{2,4,5\}$.
2. L'univers image est $X(\Omega)=\{-1,0,1\}$. On a $\{X=1\}=\{1,3,6\}$ et $\{X=-1\}=\{4\}$. La loi de X est donc déterminée par

k	-1	0	1
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3. L'univers image par Y est $\{1,3,5\}$ et comme $x\mapsto 2x+3$ réalise une bijection de $\{-1,0,1\}$ vers $\{1,3,5\}$, on obtient directement que la loi de Y est déterminée par

k	1	3	5
$P(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

4. L'univers image par Z est $\{0,1\}$ et

$$\{Z=0\}=\{X=0\}\qquad \{Z=1\}=\{X=1\}\cup\{X=-1\}$$

Donc

k	0	1
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Solution 2 –

1. On sait que les faces de même parité sont équiprobables. Notons $p_p = P(\{k\})$ pour k pair et $p_i = P(\{k\})$ pour k impair. D'après l'énoncé, on a $p_p = 2p_i$.
Comme la famille $(\{k\})_{k\in[\![1,12]\!]}$ forme un système complet d'événements de Ω (ce sont les événements élémentaires), on a que

$$sum_{k=1}^{12} P(\{k\}) = 1$$
$$6p_p + 6p_i = 1$$
$$18p_i = 1$$

On en déduit que pour tout $k\in[\![1,12]\!]$:

   - Si k est impair : $P(\{k\}) = \frac{1}{18}$,
   - Si k est pair : $P(\{k\}) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

2. En calculant la distance à 6 de tous les éléments de $[\![1,12]\!]$, on trouve que $X(\Omega)=[\![0,6]\!]$ et que

$$\{X=0\}=\{6\},\quad \{X=1\}=\{5,7\},\quad \{X=2\}=\{4,8\}$$
$$\{X=3\}=\{3,9\},\quad \{X=4\}=\{2,10\},\quad \{X=5\}=\{1,11\},\quad \{X=6\}=\{12\}$$

Le calcul de la probabilité de chaque événement s'effectue alors comme suit :
$P(X=1)=P(\{5\}\cup\{7\})=P(\{5\})+P(\{7\})$ car $\{5\}$ et $\{7\}$ sont incompatibles. On en déduit que $P(X=1)=2p_i=\frac{1}{9}$.
En procédant ainsi pour chaque événement, on en déduit que la loi de X est entièrement déterminée par

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

3. On s'intéresse désormais à Y. Notons $g : \begin{array}{ccc} [\![0,6]\!] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-3x \end{array}$. Alors $Y = g\circ X$.
On calcule les images par g des éléments de $X(\Omega)$:

$$g(0)=g(3)=0,\quad g(1)=g(2)=-2,\quad g(4)=4,\quad g(5)=10,\quad g(6)=18.$$

On en déduit que $Y(\Omega)=\{-2,0,4,10,18\}$ et on relie les événements concernant Y à ceux concernant X :

$$\{Y=-3\}=\{X=1\}\cup\{X=2\},\qquad \{Y=0\}=\{X=0\}\cup\{X=2\}.$$
$$\{Y=4\}=\{X=4\},\quad \{Y=5\}=\{X=10\},\{Y=6\}=\{X=18\}.$$

En utilisant les valeurs trouvées précédemment pour la loi de X, on en déduit que la loi de Y est entièrement déterminée par

k	-2	0	4	10	18
$P(Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Solution 3 –

1. Je dois d'abord déterminer le support de X. La variable X peut prendre trois valeurs distinctes :
   - X peut valoir 1.5€ si j'obtiens deux nombres 1 :
2€ de gain auquel il faut soustraire la mise de départ de 0.5€,

- X peut valoir 0.5€ si j'obtiens deux nombres identiques mais différents de 1 :
  1€ de gain auquel il faut soustraire la mise de départ de 0.5€,
- X peut valoir -0.5€ si j'obtiens deux nombres distincts :
  je ne gagne rien et il faut encore une fois prendre en compte la mise de départ.

Ainsi le support est donné par

$$X(\Omega) = \left\{-0.5, 0.5, 1.5\right\}.$$

Je dois désormais calculer les probabilités $P(X = -0.5)$, $P(X = 0.5)$ et $P(X = 1.5)$.
Il y a tout d'abord 36 tirages possibles, tous équiprobables :

$$\Omega = \left\{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\right\}.$$

Par ailleurs, j'ai vu qu'il n'y avait qu'un seul tirage possible, le tirage $(1,1)$, pour l'évènement $[X = 1.5]$. Ainsi

$$P(X = 1.5) = P\big(\{(1,1)\}\big) = \frac{1}{36}.$$

De même, il y a 5 tirages possibles, $(2,2), (3,3), \dots, (6,6)$, pour l'évènement $[X = 0.5]$. Ainsi

$$P(X = 0.5) = P\big(\{(2,2), (3,3), \dots, (6,6)\}\big) = \frac{5}{36}.$$

Enfin, je sais que

$$P(X = -0.5) = 1 - P(X = 0.5) - P(X = 1.5) = 1 - \frac{5}{36} - \frac{1}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

La loi de X est donc donnée par le tableau suivant

x	-0.5	0.5	1.5
$P(X = x)$	$\frac{30}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Je calcule l'espérance de X,

$$E(X) = -0.5 \times \frac{30}{36} + 0.5 \times \frac{5}{36} + 1.5 \times \frac{1}{36} = \frac{-15 + 2.5 + 1.5}{36} = -\frac{11}{36}.$$

Remarque : L'espérance étant négative, cela signifie que le gain moyen du joueur est négatif. Autrement dit, le jeu est défavorable au joueur.

Solution 4 – La loi de X est bien définie si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $ak(n-k) \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} ak(n-k) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} ak(n-k) &= a\left(n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= a\left(n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= a\frac{n(n+1)}{6}\left(3n - (2n+1)\right) \\
&= a\frac{n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}$$

Donc la loi de X est bien définie si et seulement si $\boxed{a = \dfrac{6}{(n-1)n(n+1)}}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \\
&= a\sum_{k=1}^{n} k^2(n-k) \\
&= a\left(n\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3\right) \\
&= a\left(n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \\
&= a\frac{n^2(n+1)}{12}\left(4n + 2 - 3n - 3\right) \\
&= a\frac{n}{2} \cdot \frac{n(n+1)(n-1)}{6} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

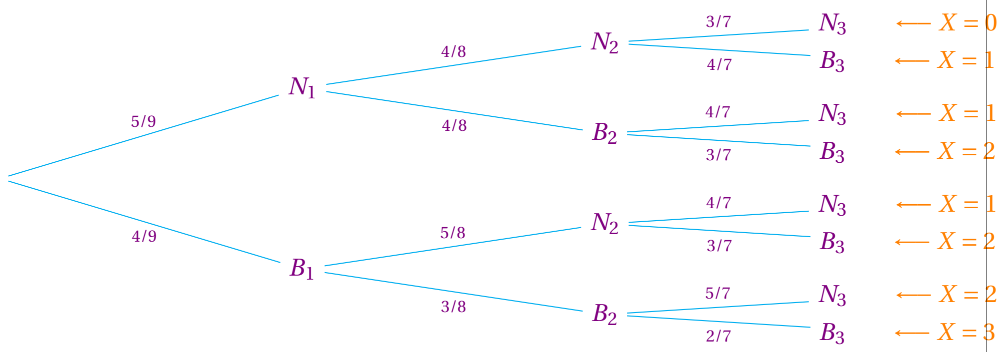
Donc $\boxed{E(X) = \dfrac{n}{2}}$.

Solution 5 –

1. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3 selon que je tire aucune boule blanche, une boule blanche, deux boules blanches ou trois boules blanches. Ainsi le support de la variable aléatoire X est donné par

$$X(\Omega) = \left\{0, 1, 2, 3\right\}.$$

2. Je modélise la situation par un arbre pondéré *(au brouillon)*.



Je commence par calculer $P(X=0)$. Comme il n'y a qu'une seule branche menant à l'évènement $[X=0]$, j'applique donc la formule des probabilités composées :

$$P(X=0)=P(N_1\cap N_2\cap N_3)=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)\times P_{N_1\cap N_2}(N_3)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{42}.$$

Pour calculer $P(X=1)$, j'applique la formule des probabilités totales,

$$P(X=1)=P(N_1\cap N_2\cap B_3)+P(N_1\cap B_2\cap N_3)+P(B_1\cap N_2\cap N_3)$$

☞ *Somme de chacune des branches menant à* $[X=1]$.

$$=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}$$

☞ *Formule des probabilités composées.*

$$=\frac{10}{63}+\frac{10}{63}+\frac{10}{63}=\frac{30}{63}=\frac{10}{21}\left(=\frac{20}{42}\right)$$

Pour calculer $P(X=2)$, j'applique la formule des probabilités totales,

$$P(X=2)=P(N_1\cap B_2\cap B_3)+P(B_1\cap N_2\cap B_3)+P(B_1\cap B_2\cap N_3)$$

☞ *Somme de chacune des branches menant à* $[X=2]$.

$$=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}$$

☞ *Formule des probabilités composées.*

$$=\frac{5}{42}+\frac{5}{42}+\frac{5}{42}=\frac{15}{42}$$

Enfin pour calculer $P(X=3)$, il n'y a de nouveau qu'un chemin et j'applique la formule des probabilités composées,

$$P(X=3)=P(B_1\cap B_2\cap B_3)=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\times P_{B_1\cap B_2}(B_3)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{21}\left(=\frac{2}{42}\right)$$

Je peux résumer la loi de X dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$

3. Je calcule l'espérance de X.

$$E(X)=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{20}{42}+2\times\frac{15}{42}+3\times\frac{2}{42}=\frac{20+30+6}{42}=\frac{56}{42}=\frac{4}{3}.$$

Pour calculer l'écart-type de X, je dois d'abord calculer la variance de X. Pour cela, je débute par calculer $E\left(X^2\right)$ grâce au théorème de transfert :

$$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{42}+1^2\times\frac{20}{42}+2^2\times\frac{15}{42}+3^2\times\frac{2}{42}=\frac{20+60+18}{42}=\frac{98}{42}=\frac{7}{3}.$$

Ensuite, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{7}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{7}{3}-\frac{16}{9}=\frac{21}{9}-\frac{16}{9}=\frac{5}{9}.$$

Finalement l'écart-type de X est donné par

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Solution 6 –

1. (a) La probabilité $P_{\mathcal{U}}(X=0)$ correspond à la probabilité de n'obtenir aucune boule noire, **sachant** que le tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}$. On tire donc 3 boules successivement et **avec remise** dans une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches. La probabilité de n'obtenir aucune boule noire est donc donnée par

$$P_{\mathcal{U}}(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}.$$

La probabilité $P_{\mathcal{V}}(X=0)$ correspond à la probabilité de n'obtenir aucune boule noire, **sachant** que le tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{V}$. On tire donc 3 boules successivement et **avec remise** dans une urne contenant 4 boules noires et 1 boule blanche. La probabilité de n'obtenir aucune boule noire est donc donnée par

$$P_{\mathcal{V}}(X=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}.$$

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(X=0)=P(\mathcal{U})\times P_{\mathcal{U}}(X=0)+P(\mathcal{V})\times P_{\mathcal{V}}(X=0)$$

☞ *Somme des branches menant à* $[X=0]$.

$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{125}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{125}=\frac{8+1}{250}=\frac{9}{250}$$

☞ *L'urne étant choisie au hasard,* $P(U)=P(V)=\frac{1}{2}$.

2. (a) La probabilité $P_{\mathcal{U}}(Y=3)$ correspond à la probabilité d'obtenir 3 boules noires, **sachant** que le tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}$. On tire donc 3 boules successivement et **sans remise** dans une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches. La probabilité d'obtenir 3 boules noires est donc donnée par

$$P_{\mathcal{U}}(Y=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}.$$

La probabilité $P_{\mathcal{V}}(Y=3)$ correspond à la probabilité d'obtenir 3 boules noires, **sachant** que le tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{V}$. On tire donc 3 boules successivement et **sans remise** dans une urne contenant 4 boules noires et 1 boule blanche. La probabilité d'obtenir 3 boules noires est donc donnée par

$$P_{\mathcal{V}}(Y=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}.$$

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$P(Y=3)=P(\mathcal{U})\times P_{\mathcal{U}}(Y=3)+P(\mathcal{V})\times P_{\mathcal{V}}(Y=3)$ ☜ *Somme des branches menant à $[Y=3]$.*

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ ☜ *L'urne étant choisie au hasard, $P(U)=P(V)=\frac{1}{2}$.*

Solution 7 –

1. Tout d'abord, il est clair d'après l'énoncé que $X(\Omega)=\{0,1\}$. Ensuite

$$P(X=1)=\frac{2}{5}\text{ Et }P(X=0)=\frac{3}{5}.$$

Ainsi X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{2}{5}$.

2. X compte le nombre de succès (ici, « obtenir un numéro pair »), lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli, identiques et indépendantes. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Solution 8 – On cherche donc la probabilité de $\left\{X>\frac{n}{2}\right\}$. Comme la situation est symétrique entre les "pile" et les "face", $\left\{X>\frac{n}{2}\right\}$ et $\left\{X<\frac{n}{2}\right\}$ ont la même probabilité.

Cas n impair : Dans le cas où n est impair, comme $\frac{n}{2}$ n'est pas entier, $\left\{X>\frac{n}{2}\right\}$ et $\left\{X<\frac{n}{2}\right\}$ forment un système complet d'événements. or, il sont équiprobables, on en déduit que $P(X>\frac{n}{2})=\frac{1}{2}$.

Cas n pair : Dans le cas où n est pair, $n=2r$ avec $r\in\mathbb{N}$ $\left\{X>\frac{n}{2}\right\}$, $\left\{X<\frac{n}{2}\right\}$ et $\left\{X=\frac{n}{2}\right\}$ forment un système complet d'événements. Donc

$$P\left(X>\frac{n}{2}\right)+P\left(X<\frac{n}{2}\right)+P\left(X=\frac{n}{2}\right)=1,$$

$$2P\left(X>\frac{n}{2}\right)+P\left(X=\frac{n}{2}\right)=1,$$

$$P\left(X>\frac{n}{2}\right)=\frac{1-P\big(X=r\big)}{2}.$$

Comme X suit une loi binomiale, on sait que

$$P\big(X=r\big)=\binom{2r}{r}\frac{1}{2^r}\frac{1}{2^{n-r}}=\frac{n!}{(r!)^2\times 2^n}$$

Finalement, $P\left(X>\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{(2r)!}{(r!)^2\times 2^{2r+1}}$.

Solution 9 –

1. L'application $x\mapsto 1-x$ réalise une bijection de $[\![-2,2]\!]$ sur $[\![-1,3]\!]$, on en déduit que l'univers image est $Y(\Omega)=[\![-1,3]\!]$ et que Y suit une loi uniforme sur $[\![-1,3]\!]$.
2. L'univers image est $Z(\Omega)=\{0,1,4\}$ et

$$\{Z=0\}=\{X=0\}\qquad\{Z=1\}=\{X=1\}\cup\{X=-1\}$$

$$\{Z=4\}=\{X=2\}\cup\{X=-2\}$$

k	0	1	4
$P(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Solution 10 – Soit $Z=X-2$. Alors Z est une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$. Ainsi, d'après le cours, $E(Z)=\frac{5}{2}$ et $V(Z)=\frac{4^2-1}{12}=\frac{5}{4}$.

On en déduit $E(X)=E(Z+2)=E(Z)+2=\frac{9}{2}$ et $V(X)=V(Z+2)=V(Z)=\frac{5}{4}$.

Donc $\boxed{E(X)=\frac{9}{2},\ V(X)=\frac{5}{4}.}$

$E(Y)=E(2X^2+3)=2E(X^2)-2E(X)^2+2E(X)^2+3=2V(X)+2E(X)^2+3$. D'où $\boxed{E(Y)=2\times\frac{5}{4}+2\times\frac{81}{4}+3=\frac{184}{4}=46.}$

$$V(Y)=V(2X^2+3)=4V(X^2).$$

D'après le théorème de transfert,
$E(X^2) = \frac{1}{4}(9+16+25+36) = \frac{43}{2}$.
$E(X^4) = \frac{1}{4}(81+256+625+1296) = \frac{2258}{4}$.
Donc $V(Y) = 4\times\left(E(X^4)-E(X^2)^2\right) = 4\times\left(\frac{2258}{4}-\left(\frac{43}{2}\right)^2\right) = 409$.

$\boxed{V(Y) = 409.}$
L'univers image par Y est $Y(\Omega) = \{21, 35, 53, 75\}$. On a

$$\{Y=21\} = \{X=3\},\quad \{Y=35\} = \{X=4\},$$

$$\{Y=53\} = \{X=5\},\quad \{Y=75\} = \{X=6\}.$$

Donc Y suit la loi déterminée par

y	21	35	53	75
$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Solution 11 –

1. Pour tout i entier entre 1 et n, on note N_i la variable aléatoire égale à la note attribuée à la i-ème copie. N_i suit une loi uniforme sur $[\![0,20]\!]$. D'après l'énoncé, les variables $N_1,\dots,N_n$ sont mutuellement indépendantes. On a alors, pour $k\in[\![0,20]\!]$,

$$\begin{aligned}P(X_n\leqslant k) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n\{N_i\leqslant k\}\right)\\ &= \prod_{i=1}^n P(N_i\leqslant k) \qquad \text{par indépendance mutuelle}\\ &= \prod_{i=1}^n \frac{k+1}{21}\\ &= \left(\frac{k+1}{21}\right)^n\end{aligned}$$

$\boxed{P(X_n\leqslant k) = \left(\frac{k+1}{21}\right)^n.}$
$\{X_n = k\} = \{X_n\leqslant k\}\setminus\{X_n\leqslant k-1\}$. Donc
$\boxed{P(X_n=k) = \left(\frac{k+1}{21}\right)^n - \left(\frac{k}{21}\right)^n.}$
Si $k=20$, alors $P(X_n=20) = 1-(20/21)^n$, donc $\boxed{P(X_n=20)\to 1.}$
Si $k\in[\![0,19]\!]$, alors $\left(\frac{k}{k+1}\right)^n\to 0$ et $\left(\frac{21}{k+1}\right)^n\to+\infty$, donc $\boxed{P(X_n=k)\to 0.}$
Si l'on note assez de copies, on va presque surement attribuer un 20 à quelqu'un à un moment.

2.
$$\begin{aligned}E(X_n) &= \sum_{k=0}^{20} kP(X_n=k)\\ &= \sum_{k=0}^{20} k\left(\frac{k+1}{21}\right)^n - k\left(\frac{k}{21}\right)^n\\ &= \sum_{k=0}^{20}\left((k+1)\left(\frac{k+1}{21}\right)^n - k\left(\frac{k}{21}\right)^n\right) - \sum_{k=0}^{20}\left(\frac{k+1}{21}\right)^n\end{aligned}$$

La première somme est télescopique, donc on obtient

$$\begin{aligned}E(X_n) &= (20+1)\left(\frac{20+1}{21}\right)^n - 0 - \sum_{k=0}^{20}\left(\frac{k+1}{21}\right)^n\\ &= 21 - \sum_{k=0}^{20}\left(\frac{k+1}{21}\right)^n\\ &= 21 - 1 - \sum_{k=0}^{19}\left(\frac{k+1}{21}\right)^n\end{aligned}$$

D'où $\boxed{E(X_n) = 20 - \sum_{k=0}^{19}\left(\frac{k+1}{21}\right)^n}$

Pour tout $k\in[\![0,19]\!]$, $\left(\frac{k+1}{21}\right)^n\to 0$, donc $\boxed{E(X_n)\to 20.}$

Solution 12 –

1. X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, donc son espérance est $E(X_1) = \frac{n+1}{2}$ et sa variance $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
2. $\{X_1=1\},\dots,\{X_1=n\}$ est un système complet d'évènements, tous de probabilité non-nulle. D'après la formule des probabilités totales, on a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$:

$$P(X_2=j) = \sum_{k=1}^n P(X_1=k)P_{\{X_1=k\}}(X_2=j) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}P_{\{X_1=k\}}(X_2=j).$$

Pour $k=j$, on a $P_{\{X_1=k\}}(X_2=j) = \frac{j+1}{n+j}$.

Pour $k \neq j$, on a $P_{\{X_1=k\}}(X_2 = j) = \dfrac{1}{n+k}$. Donc,

$$P(X_2 = j) = \frac{1}{n}\left(\frac{j}{n+j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right).$$

La loi de X_2 est ainsi déterminée par :

$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![1,n]\!],\ P(X_2 = j) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{j}{n+j} + S_n\right).}$

$$\begin{aligned}
2E(X_2) &= 2\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n+k} + S_n\right)\\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n+k} + kS_n\right)\\
&= \frac{2}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+n^2-n^2}{n+k}\right) + S_n\frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&= (n+1)S_n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2-n^2}{n+k}\right) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2}{n+k}\right)\\
&= (n+1)S_n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-n) + 2n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)\\
&= (n+1)S_n - 2n + \frac{2n(n+1)}{2n} + 2nS_n\\
&= (n+1)S_n - 2n + n + 1 + 2nS_n
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où } 2E(X_2) = 1 - n + (3n+1)S_n.}$

Solution 13 –

1. Il est clair que $X_n(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$. Cependant, on peut aussi remarquer que la parité de X_n change à chaque pas. Donc

   $\boxed{X_n(\Omega) = \left\{k \in [\![-n,n]\!] \mid k \text{ et } n \text{ ont la même parité}\right\}.}$

2. Notons G_n le nombre de pas vers la gauche effectués jusqu'à l'instant n.

   Le nombre total de pas effectué à l'instant n est n, donc $D_n + G_n = n$.

   De plus, $X_n = D_n - G_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$.

   On note pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, R_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on fait le i-ème pas vers la droite et 0 sinon. Alors R_i est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

   De plus, $D_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$ et les R_i sont mutuellement indépendantes.

   Donc $\boxed{D_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$

   On a donc, pour tout $k \in [\![-n,n]\!]$,

   $$\{X_n = k\} = \{2D_n - n = k\} = \left\{D_n = \frac{k+n}{2}\right\}.$$

   Donc $\boxed{P(X_n = k) = 0}$ si k et n ne sont pas de même parité.

   $\boxed{P(X_n = k) = \dbinom{n}{\frac{k+n}{2}} p^{\frac{k+n}{2}} q^{n-\frac{k+n}{2}}}$ si k et n ont la même parité.

3. $$\begin{aligned}
E(X_n) &= 2E(D_n) - n = 2pn - n\\
V(X_n) &= 2^2V(D_n) = 4np(1-p)
\end{aligned}$$

4. X_n centrée $\iff E(X_n) = 0 \iff 2pn - n = 0 \iff \boxed{p = \dfrac{1}{2}}$ Cela correspond au cas où les déplacements à gauche ou à droite sont équiprobables.

Solution 14 –

1. On a que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

   $$\{X \geqslant k\} = \bigcup_{i=k}^{n}\{X = i\}$$

   Par incompatibilité des événements de l'union, on a : $P(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{n} P(X = i)$. Ainsi, on va pratiquer une interversion de somme double triangulaire :

   $$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} P(X = i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} P(X = i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i \times P(X = i)\\
&= \sum_{i=0}^{n} i \times P(X = i) \quad \text{car le terme ajouté est nul}\\
&= E(X)
\end{aligned}$$

2. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement N_i : « Le niveau i est joué et il est réussi. ». Alors, pour $k \geqslant 1$, on a

$$\{X \geqslant k\} = \bigcap_{i=1}^{k} N_i$$

D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} P(X \geqslant k) &= P(N_1)P_{N_1}(N_2)\dots P_{N_1\cap\dots\cap N_{k-1}}(N_k) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^k \end{aligned}$$

3. En utilisant la question 1, on a :

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= -1 + \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \\ &= -1 + 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

D'où $E(X) = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Solution 15 –

1. (a) X_1 compte le nombre de succès (*i.e.* le nombre de personnes descendant à l'étage 1) lors de la répétition de 5 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes.
Ainsi X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$. Dès lors, le support est $X_1(\Omega) = [\![0, 5]\!]$, et pour tout $k \in X_1(\Omega)$,

$$P(X_1 = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{5}{k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}.$$

(b) Puisque X_1 suit une loi binomiale, j'utilise les formules donnant l'espérance et la variance d'une loi binomiale :

$$E(X_1) = np = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{ Et } V(X_1) = np(1-p) = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}.$$

(c) Puisque chaque personne choisit un étage de manière équiprobable, la probabilité pour une personne de monter à l'étage 1, l'étage 2 ou l'étage 3 est la même. Ainsi les variables aléatoires X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1, seul le numéro de l'étage change.

2. (a) $X_1 + X_2 + X_3$ représente le nombre de personnes descendues aux étages 1, 2 et 3. Puisque les 5 personnes choisissent de descendre à l'un de ces trois étages, j'en déduis bien que

$$X_1 + X_2 + X_3 = 5.$$

(b) L'évènement $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$ correspond au fait que personne ne soit descendu à l'étage 1 ou à l'étage 2, autrement dit que tout le monde soit descendu à l'étage 3. Ainsi

$$P\big((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\big) = P(X_3 = 5).$$

Et puisque X_3 suit la même loi que X_1, je peux utiliser la formule de la question **1.(a)** :

$$P(X_3 = 5) = \binom{5}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$$

(c) L'ascenseur ne s'arrête qu'une fois si et seulement si

- ou bien tout le monde descend à l'étage 1, correspondant à l'évènement $X_1 = 5$,
- ou bien tout le monde descend à l'étage 2, correspondant à l'évènement $X_2 = 5$,
- ou bien tout le monde descend à l'étage 3, correspondant à l'évènement $X_3 = 5$.

Ces trois évènements étant disjoints, la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est donnée par

$$P(X_1 = 5) + P(X_2 = 5) + P(X_3 = 5) = \frac{1}{243} + \frac{1}{243} + \frac{1}{243} = \frac{3}{243} = \frac{1}{81}.$$

3. L'ascenseur ne revenant pas en arrière, celui-ci s'arrête une, deux ou trois fois, selon les choix des 5 personnes à bord. Ainsi le support de Z est $Z(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

4. (a) $(Y_1 = 0)$ si et seulement si l'ascenseur ne s'arrête pas au premier étage. Autrement dit, $(Y_1 = 0)$ si et seulement si personne ne descend à l'étage 1. Ainsi les évènements $(Y_1 = 0)$ et $(X_1 = 0)$ sont identiques et j'ai bien montré que

$$P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0).$$

(b) Comme Y_1 est une variable aléatoire de Bernoulli, les évènements $(Y_1 = 0)$ et $(Y_1 = 1)$ forment un système complet d'évènements. Alors

$$P(Y_1 = 1) = 1 - P(Y_1 = 0).$$

Grâce à la question précédente,

$$P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243},$$

donc

$$P(Y_1 = 1) = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}.$$

Finalement Y_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(Y_1 = 1) = \frac{211}{243}$. Donc

$$E(Y_1) = p = \frac{211}{243}.$$

(c) Chacune des variables aléatoires Y_1, Y_2 et Y_3 vaut 1 si l'ascenseur marque l'arrêt à l'étage correspondant et 0 sinon. Ainsi le nombre total d'arrêt vérifie

$$Z = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Or ces trois variables aléatoires Y_1, Y_2 et Y_3 admettent la même espérance donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = \frac{211}{243} + \frac{211}{243} + \frac{211}{243} = \frac{3 \times 211}{243} = \frac{211}{81}.$$

Solution 16 –

1. (a) Après le tirage d'une boule et l'ajout d'une boule supplémentaire, il peut y avoir soit une boule rouge (si on a tiré une boule blanche et donc rajouté une deuxième boule blanche) soit deux boules rouges (si on a tiré une boule rouge et donc rajouté une deuxième boule rouge). Ainsi, X_1 vaut soit 1 soit 2 et donc on a bien :

$$\boxed{X_1(\Omega) = [\![1;2]\!]}$$

Puisqu'au premier tirage, il y a une chance sur deux de tirer une boule rouge et une chance sur deux de tirer une boule blanche, on a :

$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(X_1 = 2) = P(R_1) = \frac{1}{2}$$

D'où la loi de X_1 :

k	1	2
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On a alors :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Puis,

$$E(X_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Et donc d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{10}{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

Remarque : On pouvait également remarquer que X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1;2]\!]$ et utiliser les formules du cours pour calculer l'espérance et la variance de X_1 :

$$E(X_1) = \frac{n+1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X_1) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{2^2-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(b) à l'issue du deuxième tirage, il y a :

- une seule boule rouge si on a tiré successivement deux boules blanches ;
- deux boules rouges si on a tiré une boule rouge soit au premier, soit au deuxième tirage ;
- trois boules rouges si on a tiré successivement deux boules rouges.

Ainsi, on a :

$$\boxed{[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2}$$

$$\boxed{[X_2 = 2] = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)}$$

$$\boxed{[X_2 = 3] = R_1 \cap R_2}$$

(c) à l'aide de la question précédente, déterminons la loi de X_2.
Tout d'abord, on a $X_2(\Omega) = [\![1;3]\!]$. Ensuite,

- D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(X_2=2) &= P(B_1)\times P_{B_1}(R_2)+P(R_1)\times P_{R_1}(B_2)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X_2=3)=P(R_1\cap R_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

En résumé, on a :

k	1	2	3
$P(X_2=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ainsi, X_2 suit bien la loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$.
D'après le cours, on a alors :

$$E(X_2)=\frac{n+1}{2}=\frac{3+1}{2}=2 \qquad \text{et} \qquad V(X_2)=\frac{n^2-1}{12}=\frac{3^2-1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

2. (a) L'évènement $[X_n=1]$ signifie que le nombre de boules rouges n'a pas évolué au cours des n premiers tirages. Ainsi, $[X_n=1]$ signifie que l'on a tiré que des boules blanches, et donc :

$$\boxed{[X_n=1]=B_1\cap B_2\cap\cdots B_n}$$

(b) D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P(X_n=1) &= P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\times P_{B_1\cap B_2}(B_3)\times\cdots\times P_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n)\\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Pour que l'urne contienne $n+1$ boules rouges à l'issu du n-ième tirage, il faut avoir tiré n boules rouges lors des n premiers tirages. Ainsi,

$$[X_n=n+1]=R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n$$

Dès lors, d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P(X_n=n+1) &= P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)\times P_{R_1\cap R_2}(R_3)\times\cdots\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n)\\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

3. (a) Remarquons tout d'abord qu'à l'issue du n-ième tirage, l'urne contient au total $n+2$ boules car elle en contient 2 initialement et que l'on en rajoute une à chaque tirage. Si l'évènement $[X_n=k-1]$ est réalisé (c'est-à-dire si l'urne contient $k-1$ boules rouges à l'issue du n-ième tirage), alors l'urne contient k boules rouges à l'issue du $(n+1)$-ième tirage (ce qui correspond à l'évènement $[X_{n+1}=k]$ si et seulement si, on tire une boule rouge dans l'urne constituée alors de $k-1$ boules rouges pour un total de $n+2$ boules. Ainsi,

$$\boxed{P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)=\frac{k-1}{n+2}}$$

De même, si l'évènement $[X_n=k]$ est réalisé (c'est-à-dire si l'urne contient k boules rouges à l'issue du n-ième tirage), alors l'urne contient k boules rouges à l'issue du $n+1$-ième tirage si et seulement si l'on tire une boule blanche dans l'urne constituée alors de $n+2-k$ boules blanches et d'un total de $n+2$ boules. Ainsi,

$$\boxed{P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)=\frac{n+2-k}{n+2}}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=k) &= P(X_n=k)P_{X_n=k}(X_{n+1}=k)+P(X_n=k-1)P_{X_n=k-1}(X_{n+1}=k)\\ &= \frac{n+2-k}{n+2}\times P(X_n=k)+\frac{k-1}{n+2}\times P(X_n=k-1)\end{aligned}$$

(c) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\forall k\in[\![1;n+1]\!],\qquad P(X_n=k)=\dfrac{1}{n+1}$ »

Initialisation $(n10)$:

D'après la question **1.(a)**, on a $P(X_1=1)=P(X_1=2)=\dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $k\in[\![1;n+2]\!]$. Distinguons trois cas :

- Si $k=1$, alors on sait d'après la question **3.(b)** que $P(X_{n+1}=1)=\dfrac{1}{n+2}$.

- Si $k \in [\![2;n+1]\!]$, alors d'après la question **4.(b)** :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=k) &= \frac{n+2-k}{n+2}\times P(X_n=k)+\frac{k-1}{n+2}\times P(X_n=k-1)\\ &= \frac{n+2-k}{n+2}\times\frac{1}{n+1}+\frac{k-1}{n+2}\times\frac{1}{n+1} \qquad \text{car } \mathcal{P}_n \text{ est vraie}\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2-k}{n+2}+\frac{k-1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}\\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

- Si $k=n+2$, alors on sait d'après la question **3.(b)** que $P(X_{n+1}=n+2)=\dfrac{1}{n+2}$.

Donc, on a bien justifié que :

$$\forall k\in[\![1;n+2]\!],\qquad P(X_{n+1}=k)=\frac{1}{n+2}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \forall k\in[\![1;n+1]\!]\qquad P(X_n=k)=\frac{1}{n+1}$$

Autrement dit, pour tout entier $n\geqslant 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[\![1;n+1]\!]$.

Solution 17 – On note $E=\{1A,2A,2B,3A,3B,3C\}$ les six boules de l'urne.
L'univers est Ω l'ensemble des parties à deux éléments de E. On le munit de la probabilité uniforme P.

On a donc $\mathrm{Card}(\Omega)=\dbinom{6}{2}=15$.

1. $X(\Omega)=[\![1,3]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![2,3]\!]$, car au moins une des deux boules porte un numéro supérieur ou égal à 2.
   On a donc que $(X,Y)(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)=[\![1,3]\!]\times[\![2,3]\!]$.
   Détaillons les évènements conjoints de (X,Y).
   $\{(X,Y)=(1,2)\}=\{\{1A,2A\},\{1A,2B\}\}$,
   $\{(X,Y)=(1,3)\}=\{\{1A,3A\},\{1A,3B\},\{1A,3C\}\}$,
   $\{(X,Y)=(2,2)\}=\{\{2A,2B\}\}$,
   $\{(X,Y)=(2,3)\}=\{\{2A,3A\},\{2A,3B\},\{2A,3C\},\{2B,3A\},\{2B,3B\},\{2B,3C\}\}$,
   $\{(X,Y)=(3,2)\}=\varnothing$,
   $\{(X,Y)=(3,3)\}=\{\{3A,3B\},\{3A,3C\},\{3B,3C\}\}$.
   La loi conjointe de (X,Y) est donc déterminée par

X \ Y	2	3
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$
3	0	$\frac{3}{15}$

2. On en déduit que les lois de X et Y sont entièrement déterminées par :

k	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{5}$

k	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

3. On note que $Z=g(X,Y)$ où $g:(x,y)\mapsto x+y$ est une fonction de $[\![1,3]\!]\times[\![2,3]\!]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   $g(1,2)=3$, $g(2,2)=g(1,3)=4$, $g(2,3)=g(3,2)=5$ et $g(3,3)=6$
   On en déduit que $Z(\Omega)\subset g(X(\Omega),Y(\Omega))=[\![3,6]\!]$.
   On remarque que :
   $\{Z=3\}=\{(X,Y)=(1,2)\}$,
   $\{Z=4\}=\{(X,Y)=(2,2)\}\bigcup\{(X,Y)=(1,3)\}$,
   $\{Z=5\}=\{(X,Y)=(2,3)\}\bigcup\{(X,Y)=(3,2)\}$,
   $\{Z=6\}=\{(X,Y)=(3,3)\}$,
   donc la loi de Z est entièrement déterminée par

k	3	4	5	6
$P(Z=k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Solution 18 –

1. L'univers de l'expérience est $\Omega = [\![1,4]\!]^2$, muni de la probabilité uniforme P.
   L'univers image de D_1 est $D_1(\Omega) = [\![1,4]\!]$.
   Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, on a que
   $$(D_1 = i) = \{(i,1),(i,2),(i,3),(i,4)\},$$
   donc $P(D_1 = i) = \dfrac{\text{Card}(D_1 = i)}{\Omega} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.
   On en conclut que D_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$. On peut montrer de même que D_2 suit également une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$.
2. On commence par remarquer que $S(\Omega) \subset [\![2,8]\!]$. On a que
   $(S=2) = \{(1,1)\}$, $(S=3) = \{(1,2),(2,1)\}$, $(S=4) = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.
   $(S=5) = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.
   $(S=8) = \{(4,4)\}$, $(S=7) = \{(4,3),(3,4)\}$, $(S=6) = \{(4,2),(3,3),(2,4)\}$. Donc la loi de S est déterminée par :

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(S=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

3. L'univers image est $M(\Omega) = [\![1,4]\!]$.
   $(M=1) = \{(1,1)\}$, $(M=2) = \{(2,1),(2,2),(1,2)\}$
   $(M=3) = \{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}$
   $(M=4) = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4)\}$
   Donc la loi de M est déterminée par :

x	1	2	3	4
$P(M=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Solution 19 – On pose $q = 1-p$.

1. Pour $i \in [\![1,4]\!]$, on note P_i la variable de Bernoulli valant 1 si la raquette de la patte i est toujours présente à l'atterrissage. Alors, les P_i suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre q, sont indépendantes d'après l'énoncé et $X = \sum_{i=1}^{4} P_i$, donc X suit une loi binomiale de paramètres 4 et q.
2. De manière similaire, Y suit une loi binomiale de paramètres 2 et q.
3. $$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = p^4 + 4p^3(1-p)$$
   $$P(Y<1) = P(Y=0) = p^2$$
   $$\begin{aligned} P(X<2) - P(Y<1) &= p^2\left(4p(1-p) + p^2 - 1\right) \\ &= p^2\left(-3p^2 + 4p - 1\right) \\ &= -3p^2(p-1)(p-\frac{1}{3}) \end{aligned}$$
   On a donc plus de chances de s'enliser avec deux raquettes qu'avec quatre lorsque p est entre 0 et $\dfrac{1}{3}$, et moins lorsque p est entre $\dfrac{1}{3}$ et 1.

Solution 20 –

1. En notant A_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème aléatoire atteint son correspondant et 0 sinon, on a que $X = \sum_{k=1}^{n} A_i$ avec les A_i des loi de Bernoulli de même paramètre p et indépendantes d'après l'énoncé, donc X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. (a) Pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $\ell \in [\![0,n-k]\!]$, la loi conditionnelle de $\{Y=\ell\}$ sachant $\{X=k\}$ décrit une situation similaire à celle de la question précédente, mais avec seulement $n-k$ personne appelées. On en déduit que c'est une loi binomiale de paramètres $n-k$ et p. D'où
   $$P_{\{X=k\}}(Y=\ell) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-k-\ell}$$
   (b) $\forall r \in [\![0,n]\!], k \in [\![0,r]\!]$,
   $$\begin{aligned} \binom{n-k}{r-k}\binom{n}{k} &= \frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-k-r+k)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(r-k)!(n-r)!k!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \times \frac{r!}{(r-k)!k!} \\ &= \binom{n}{r}\binom{r}{k} \end{aligned}$$
   (c) Il est clair que $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Pour tout $r \in [\![0,n]\!]$,
   $$\{Z=r\} = \bigcup_{k=0}^{r} \{X=k \text{ Et } Y=r-k\}$$

Par incompatibilité de ces événements, on a donc

$$\begin{aligned} P(Z=r) &= \sum_{k=0}^{r} P(X=k \text{ Et } Y=r-k) \\ &= \sum_{k=0}^{r} P(X=k) P_{X=k}(Y=r-k) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{r-k} p^{r-k} (1-p)^{n-k-(r-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} p^r (1-p)^{2n-k-r} \end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on obtient donc

$$\begin{aligned} P(Z=r) &= \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{r}\binom{r}{k} p^r (1-p)^{2n-k-r} \\ &= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{2n-2r} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (1-p)^{r-k} \end{aligned}$$

On reconnait un binôme de Newton, donc

$$\begin{aligned} P(Z=r) &= \binom{n}{r} p^r ((1-p)^2)^{n-r} (1+1-p)^r \\ &= \binom{n}{r} (1-(2p-p^2))^{n-r} (2p-p^2)^r \end{aligned}$$

On en déduit que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $2p-p^2$.

Solution 21 – L'univers de l'expérience est

$$\Omega = [\![1,3]\!] \times \{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J\} \bigcup [\![4,6]\!] \times \left\{K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T\right\}.$$

On le munit de la probabilité uniforme P (car le dé est équilibré et les urnes contiennent le même nombre de boules). On a que $\mathrm{Card}(\Omega) = 60$.
On remarque que X et Y sont à valeurs dans $[\![0,1]\!]^2$, donc $(X,Y)(\Omega) \subset [\![0,1]\!]^2$.
$\{(X,Y)=(1,1)\} = \{1,3\} \times \{A,E,I\} \cup \{(5,O)\}$
$\{(X,Y)=(0,1)\} = \{2\} \times \{A,E,I\} \cup \{4,6\} \times \{O\}$
$\{(X,Y)=(1,0)\} = \{1,3\} \times \{B,C,D,F,G,H,J\} \cup \{5\} \times \left\{K,L,M,N,P,Q,R,S,T\right\}$
$\{(X,Y)=(0,0)\} = \{2\} \times \{B,C,D,F,G,H,J\} \cup \{4,6\} \times \left\{K,L,M,N,P,Q,R,S,T\right\}$

Les unions en présence étant toutes des unions d'ensembles disjoints, on obtient les cardinaux de ces ensembles. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(\{(X,Y)=(1,0)\}) &= \mathrm{Card}(\{1,3\} \times \{B,C,D,F,G,H,J\}) \\ &\quad + \mathrm{Card}(\{5\} \times \left\{K,L,M,N,P,Q,R,S,T\right\}) \\ &= 2 \times 7 + 1 \times 9 \\ &= 23 \end{aligned}$$

La loi conjointe de (X,Y) est donc déterminée par

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{25}{60}$	$\frac{5}{60}$
1	$\frac{23}{60}$	$\frac{7}{60}$

Pour obtenir les lois conjointes :
$P(Y=0) = \sum_{x \in \{0,1\}} P(X=x, Y=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$
$P(Y=1) = \sum_{x \in \{0,1\}} P(X=x, Y=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$
Donc $Y \sim \mathcal{B}(\frac{1}{5})$.
En procédant de même pour X, on trouve que $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Solution 22 –

1. $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\{X=k\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{(X,Y)=(k,i)\}$, donc par incompatibilité, on a :
$$P(X=k) = \sum_{i=0}^{n} P((X,Y)=(k,i)) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$
Donc $X \sim \mathcal{U}([\![0,n]\!])$. Par symétrie, $Y \sim \mathcal{U}([\![0,n]\!])$.

2. (a) On a $\{X=Y\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{(X,Y)=(i,i)\}$ et par incompatibilité des événements,
$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k \text{ et } Y=k) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k \text{ et } Y=k)$$
$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Par symétrie des rôles joués par X et par Y, $P(X \geqslant Y) = P(Y \geqslant X)$. Or, avec la formule de probabilité d'une union, on a

$$\begin{aligned} 1 &= P((X \geqslant Y) \cup (Y \geqslant X)) \\ &= P(X \geqslant Y) + P(Y \geqslant X) - P(X = Y) \\ &= 2P(X \geqslant Y) - P(X = Y) \end{aligned}$$

puis

$$P(X \geqslant Y) = \frac{1 + P(X = Y)}{2}.$$

Finalement, avec la question précédente, $P(X \geqslant Y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(n+1)}$.

3. On a $S(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$.

(a) Si $s \leqslant n$:

$$\{X + Y = s\} = \bigcup_{k \in [\![0,s]\!]} \{X = s - k \text{ et } Y = k\}$$

Comme il s'agit d'une union d'événements incompatibles, on a

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{k=0}^{s} P(X = s - k \text{ et } Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{s+1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

(b) Si $s > n$, on procède de manière similaire, mais il faut faire attention à ce que les valeurs prises par X et Y ne peuvent pas être négatives :

$$\{X + Y = s\} = \bigcup_{k \in [\![s-n,n]\!]} \{X = s - k \text{ et } Y = k\}$$

Comme il s'agit d'une union d'événements incompatibles, on a

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{k=s-n}^{n} P(X = s - k \text{ et } Y = k) \\ &= \sum_{k=s-n}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{2n - s + 1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

4. On a $D(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, pour $d \in [\![0, n]\!]$,

$$P(D = d) = P(|X - Y| = d) = P(X - Y = d \text{ ou } X - Y = -d)$$

(a) Si $d = 0$, alors

$$P(D = d) = P(X = Y) = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Si $d \neq 0$, alors

$$P(D = d) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k \text{ et } Y = d + k) + \sum_{k=0}^{n} P(Y = k \text{ et } X = d + k).$$

Par symétrie, les deux sommes sont égales.

Si $d + k \in [\![0, n]\!]$ (c'est-à-dire si $k \in [\![0, n-d]\!]$), alors $P(X = k \text{ et } Y = d + k) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Sinon, $P(X = k \text{ et } Y = d + k) = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} P(X = k \text{ et } X = d + k) &= \sum_{k=0}^{n-d} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n - d + 1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$P(D = d) = \frac{2(n - d + 1)}{(n+1)^2}.$$

Solution 23 –

1. $Y(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et $X(\Omega) = \{0, 1\}$. On a :

$P(Y = 0) = P((X, Y) = (0, 0)) + P((X, Y) = (1, 0)) = \dfrac{1}{20} + \dfrac{17}{60} = \dfrac{1}{3}$.

$P(Y = 1) = P((X, Y) = (0, 1)) + P((X, Y) = (1, 1)) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

$P(Y = 2) = P((X, Y) = (0, 2)) + P((X, Y) = (1, 2)) = \dfrac{1}{6}$.

$P(X = 0) = P((X, Y) = (0, 0)) + P((X, Y) = (0, 1)) + P((X, Y) = (0, 2)) = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{10}$.

$P(X = 1) = P((X, Y) = (1, 0)) + P((X, Y) = (1, 1)) + P((X, Y) = (1, 2)) = \dfrac{17}{60} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{10}$.

Donc les lois de X et Y sont entièrement déterminées par

x	0	1
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

y	0	1	2
$P(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2. Pour tout $k \in \{0,1\}$, on a
$P_{\{Y=0\}}(X=k) = \dfrac{P(X=k, Y=0)}{P(Y=0)} = 3 \times P(X=k, Y=0)$.

x	0	1
$P_{\{Y=0\}}(X=x)$	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{17}{20}$

Pour tout $k \in \{0,1,2\}$, on a
$P_{\{X=0\}}(Y=k) = \dfrac{P(X=0, Y=k)}{P(X=0)} = \dfrac{10}{3} \times P(X=0, Y=k)$.

y	0	1	2
$P_{\{X=0\}}(Y=y)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{5}{6}$	0

3. $P(X=0) \times P(Y=0) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{10}$.
$P(X=0, Y=0) = \dfrac{1}{20}$.
$\boxed{\text{Donc } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

4. $\boxed{E(XY) = 1 \times \dfrac{1}{4} + 2\dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{12}.}$
$E(X) = \dfrac{7}{10}$ et $E(Y) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.
D'où $\boxed{E(X)E(Y) = \dfrac{35}{60} = \dfrac{7}{12}.}$
On en déduit que $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) - E(Y) = 0$, donc que X et Y sont décorrélées.

Solution 24 – Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $Z_\lambda = \lambda X + Y$. Alors,

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(\lambda X) + 2\,\mathrm{Cov}(\lambda X, Y) + V(Y) \\ &= \lambda^2 V(X) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y) \end{aligned}$$

Or, une variance est toujours positive, donc,

$$(\star) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda^2 V(X) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y) \geqslant 0$$

- Si $V(X) = 0$, alors on doit avoir $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ pour que $(\star)$ soit vérifiée. On a alors bien que $\mathrm{Cov}(X,Y) \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}$.
- Sinon, on est en présence d'une inéquation du second degré et $(\star)$ implique que le discriminant $\Delta = 4\,\mathrm{Cov}(X,Y)^2 - 4V(X)V(Y)$ est négatif, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}.$$

Solution 25 –

1. Le tableau définit bien une loi conjointe si et seulement si toutes les valeurs sont positives et que leur somme vaut 1.
$\dfrac{1}{6} + p + \dfrac{1}{3} - p + \dfrac{1}{2} - p + p = 1$. Donc la somme des valeurs du tableau est toujours 1.
Pour que toutes les valeurs soient positives, on doit avoir :
$-\dfrac{1}{6} \leqslant p \leqslant \dfrac{5}{6}$, $\dfrac{-2}{3} \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{-1}{2} \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant p \leqslant 1$.
Finalement, le tableau définit une loi conjointe si et seulement si $\boxed{p \in [0, \dfrac{1}{3}].}$

2. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1\}$.
$P(X=0) = \dfrac{1}{6} + p + \dfrac{1}{3} - p = \dfrac{1}{2}$.
$P(X=1) = \dfrac{1}{2} - p + p = \dfrac{1}{2}$.
Donc $\boxed{X \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{1}{2}.}$
$P(Y=0) = \dfrac{1}{6} + p + \dfrac{1}{2} - p = \dfrac{2}{3}$.
$P(Y=1) = \dfrac{1}{3} - p + p = \dfrac{1}{3}$.
Donc $\boxed{Y \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{1}{3}.}$

3. On a donc $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{2} \text{ et } V(X) = \dfrac{1}{4}.}$
On a donc $\boxed{E(Y) = \dfrac{1}{3} \text{ et } V(Y) = \dfrac{2}{9}.}$

4. D'après le théorème de transfert,
$E(XY) = 1 \times P(XY = 1) = p$.
Donc $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = p - \dfrac{1}{6}.}$

5. Une condition nécessaire pour que X et Y soient indépendantes est $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, ce qui implique que $p = \dfrac{1}{6}$.
Pour $p = \dfrac{1}{6}$, calculons les valeurs de $P(X=k)P(Y=j)$ pour tout k, j dans $\{0,1\}$.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Comparons avec le tableau des valeurs de $P(X=k, Y=j)$.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi, pour tout k, j dans $\{0,1\}$, on a $P(X=k)P(Y=j) = P(X=k, Y=j)$, donc X et Y sont indépendantes.

Finalement, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes si et seulement si } p = \frac{1}{6}.}$

Solution 26 –

1. Z_p est le nombre de boule blanches obtenues après p lancers. $\boxed{Z_p(\Omega) = [\![0, p]\!]}$.
2. $\boxed{X_1 \text{ est une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}. \text{ Donc } E(X_1) = \frac{1}{2}.}$
3. $(X_1, X_2)(\Omega) = [\![0,1]\!]^2$.
   Soient $i, j \in [\![0,1]\!]$. Alors,
   $$P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i)P_{X_1=i}(X_2 = j).$$
   $$P(X_1=0, X_2=0) = P(X_1=0)P_{X_1=0}(X_2=0) = \frac{1}{2}\frac{1+c}{2+c} = \frac{1+c}{2(2+c)}.$$
   $$P(X_1=0, X_2=1) = P(X_1=0)P_{X_1=0}(X_2=1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2+c} = \frac{1}{2(2+c)}.$$
   $$P(X_1=1, X_2=0) = P(X_1=1)P_{X_1=1}(X_2=0) = \frac{1}{2}\frac{1}{2+c} = \frac{1}{2(2+c)}.$$
   $$P(X_1=1, X_2=1) = P(X_1=1)P_{X_1=1}(X_2=1) = \frac{1}{2}\frac{1+c}{2+c} = \frac{1+c}{2(2+c)}.$$
   La loi conjointe de (X_1, X_2) est donc déterminée par

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$\frac{1+c}{2(2+c)}$	$\frac{1}{2(2+c)}$
1	$\frac{1}{2(2+c)}$	$\frac{1+c}{2(2+c)}$

   On en déduit la loi marginale de X_2 : $X_2(\Omega) = [\![0,1]\!]$ et :
   $$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$
   Donc X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. D'où $\boxed{E(X_2) = \frac{1}{2}.}$
4. $Z_2 = X_1 + X_2$, donc $Z_2(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
   $\{Z_2 = 0\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0\}$. Donc $P(Z_2 = 0) = \frac{1+c}{2(2+c)}$.
   $\{Z_2 = 1\} = \{X_1 = 0, X_2 = 1\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = 0\}$. Donc $P(Z_2 = 1) = \frac{1}{(2+c)}$.
   $\{Z_2 = 2\} = \{X_1 = 1, X_2 = 1\}$. Donc $P(Z_2 = 2) = \frac{1+c}{2(2+c)}$.
   Donc la loi de Z est déterminée par

z	0	1	2
$P(Z_2 = z)$	$\frac{1+c}{2(2+c)}$	$\frac{1}{(2+c)}$	$\frac{1+c}{2(2+c)}$

5. (a) Si $Z_p = k$, cela signifie que l'on a tiré k boules blanches et $p-k$ boules noires lors des p premiers tirages. Après ces p tirages l'urne est alors composée de $1+kc$ boules blanches et $1+(p-k)c$ boules noires. On en déduit que
   $$P(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k) = \frac{1+kc}{1+kc+1+(p-k)c}$$
   $$\boxed{P(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k) = \frac{1+kc}{2+pc}.}$$
   (b) L'ensemble des évènements $\{Z_p = j\}$ pour $j \in [\![0,p]\!]$ est un système complet d'évè-

nements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(X_{p+1}=1) &= \sum_{j=0}^{n} P(Z_p=j)P(X_{p+1}=1 \mid Z_p=j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(Z_p=j)\frac{1+jc}{2+pc} \\ &= \frac{1}{2+pc}\left(\sum_{i=0}^{n} P(Z_p=j)+c\sum_{i=0}^{n} jP(Z_p=j)\right) \\ &= \frac{1}{2+pc}\left(1+cE(Z_p)\right) \end{aligned}$$

(c) Considérons les propositions $\mathcal{H}_p$ définies dans l'énoncé.
Initialisation : Déjà vu.
Hérédité : Soit $p \in [\![1,n]\!]$ fixé. Supposons que $\mathcal{H}_p$ est vraie.
On a donc notamment $E(X_i)=\frac{1}{2}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.
Alors, par linéarité de l'espérance,

$$E(Z_p)=\sum_{k=1}^{p} E(X_k)=\frac{p}{2}.$$

D'où

$$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+c\frac{p}{2}}{2+pc}=\frac{1}{2}.$$

Donc X_{p+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
D'où le résultat par récurrence.

Solution 27 –

1. X_n est une somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, donc X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. D'après le cours,

$$E(X_n)=np, \qquad V(X_n)=np(1-p).$$

2. Par propriétés de l'espérance et de la variance, on a donc

$$E\left(\frac{X_n}{n}\right)=p, \qquad V\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(X_n)=\frac{p(1-p)}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout $\varepsilon>0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Il reste à démontrer que $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$. Or

$$p(1-p)-\frac{1}{4}=-p^2+p-\frac{1}{4}=-(p-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$$

On a donc bien que

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. On cherche n tel que $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<0,01\right)\geqslant 0,95$, soit, en passant au contraire, tel que $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geqslant 0,01\right)<0,05$. Or,

$$\frac{1}{4n0,01^2}<0,05 \iff n>50000,$$

donc, en faisant plus de 50000 prélèvements, on a

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{4n0,01^2}<0,05$$

et on a une probabilité supérieure à $0,95$ que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près.

Solution 28 –

1. Pour tout $i\in[\![1,100]\!]$, on note V_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la vache 1 choisit l'étable 1 et 0 sinon. Les V_i suivent des loi de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ et $X=\sum_{i=1}^{100}V_i$, donc X suit une loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{1}{2}$. On en déduit directement,

$$E(X)=50 \qquad V(X)=25$$

2. Chaque vache trouve une place si, pour chaque étable, le nombre de vaches choisissant cette étable est inférieur au nombre de places. Donc

$$E=\{X\leqslant n\}\cap\{100-X\leqslant n\}=\{100-n\leqslant X\leqslant n\}$$

3. On a aussi

$$E=\{50-n\leqslant X-50\leqslant n-50\}=\{|X-E(X)|\leqslant n-50\}$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a que

$$P(|X-E(X)|\geqslant n-50)=\frac{V(X)}{(n-50)^2}=\frac{25}{(n-50)^2}$$

De plus, on a par passage au contraire que

$$P(E)=1-P(|X-E(X)|>n-50)=1-P(|X-E(X)|\geqslant n-49)\geqslant 1-\frac{25}{(n-49)^2}$$

On résout donc $1-\dfrac{25}{(n-49)^2}\geqslant 0{,}95$:

$$1-\frac{25}{(n-49)^2}\geqslant 0{,}95 \iff n\geqslant 49+\sqrt{\frac{25}{0{,}05}} \iff n\geqslant 49+\sqrt{50}$$

Ainsi, $n=72$ convient.

Solution 29 –

1. Pour tout $t\geqslant 0$, Si $X-E(X)\geqslant a$, alors $X-E(X)+t\geqslant a+t$. Comme $a+t$ est positif, on en déduit que $(X-E(X)+t)^2\geqslant(a+t)^2$. Ainsi,

$$\{X-E(X)\geqslant a\}\subset\left\{(X-E(X)+t)^2\geqslant(a+t)^2\right\}.$$

2. Soit $t\geqslant 0$. On pose $Y=X-E(X)+t$. Alors, d'après l'inégalité de Markov appliquée à Y^2 en $(a+t)^2$, on a

$$P(Y^2\geqslant(a+t)^2)\leqslant\frac{E(Y^2)}{(a+t)^2}.$$

D'après la question précédente et la croissance des probabilités par rapport à l'inclusion, on sait que

$$P(X-E(X)\geqslant a)\leqslant P\left(Y^2\geqslant(a+t)^2\right),$$

$$P(X-E(X)\geqslant a)\leqslant\frac{E(Y^2)}{(a+t)^2}.$$

Il reste à étudier l'espérance de Y^2.

$$Y^2=(X-E(X))^2+2t(X-E(X))+t^2$$

En prenant l'espérance, et par linéarité de celle-ci,

$$E(Y^2)=E((X-E(X))^2)+2t(E(X-E(X)))+t^2.$$

On reconnait la définition de la variance $V(X)=E((X-E(X))^2)$. De plus, comme $E(X-E(X))=E(X)-E(X)=0$, on obtient $E(Y^2)=V(X)+t^2$. Finalement,

$$P(X-E(X)\geqslant a)\leqslant\frac{V(X)+t^2}{(a+t)^2}.$$

3. f est dérivable et pour $t\geqslant 0$,

$$f'(t)=\frac{2t(a+t)^2-(t^2+V(X))2(a+t)}{(a+t)^4}=\frac{2ta+2t^2-2t^2-2V(X)}{(a+t)^3}=\frac{2(at-V(X))}{(a+t)^3}$$

Comme a et t sont positifs, $f'(t)$ est du signe de $at-V(X)$, c'est à dire négatif pour $t<\dfrac{V(X)}{a}$, nulle en $\dfrac{V(X)}{a}$ et positif pour $t>\dfrac{V(X)}{a}$.
On en déduit que f atteint un minimum en $t=\dfrac{V(X)}{a}$.

4. En appliquant le résultat de la question 2 en $t=\dfrac{V(X)}{a}$ (qui est bien positif car une variance est toujours positive), on trouve

$$\begin{aligned}P(X-E(X)\geqslant a)&\leqslant\frac{V(X)+\left(\frac{V(X)}{a}\right)^2}{(a+\frac{V(X)}{a})^2}\\&\leqslant\frac{V(X)}{a}\,\frac{a+\frac{V(X)}{a}}{(a+\frac{V(X)}{a})^2}\\&\leqslant\frac{V(X)}{a}\,\frac{1}{a+\frac{V(X)}{a}}\\P(X-E(X)\geqslant a)&\leqslant\frac{V(X)}{a^2+V(X)}\end{aligned}$$

5. Commençons par remarquer que le terme $\dfrac{V(X)}{a^2+V(X)}$ est toujours strictement compris entre 0 et 1 si $V(X)$ n'est pas nul, donc l'inégalité n'est jamais triviale.
A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en remarquant que

$$\{X-E(X)\geqslant a\}\subset\{|X-E(X)|\geqslant a\},$$

on peut obtenir

$$P(X-E(X)\geqslant a)\leqslant P(|X-E(X)|\geqslant a)\leqslant\frac{V(X)}{a^2}.$$

On voit que le terme de droite est toujours plus grand que celui de l'inégalité de la question précédente, qui est donc plus précise.

6. On remarque que

$$\{|X-E(X)|\geqslant a\}=\{X-E(X)\geqslant a\}\cup\{-(X-E(X))\geqslant a\}.$$

Ces deux événements étant disjoints,

$$P(|X-E(X)|\geqslant a)=P(X-E(X)\geqslant a)+P(-(X-E(X))\geqslant a).$$

On a déjà majoré un dex deux termes dans la question précédente. Pour l'autre, en appliquant le résultat de la question 4 à $-X$, comme $E(-X) = -E(X)$ et $V(-X) = V(X)$, on a :

$$P(-(X-E(X)) \geqslant a) = P(-X - E(-X) \geqslant a) \leqslant \frac{V(-X)}{a^2 + V(-X)} = \frac{V(X)}{a^2 + V(X)}$$

Finalement,

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2 + V(X)} + \frac{V(X)}{a^2 + V(X)} = \frac{2V(X)}{a^2 + V(X)}.$$

7. Sous les mêmes hypothèses, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

Comparons les deux termes de deux droite des deux inégalités. Si $V(X) \neq 0$,

$$\frac{2V(X)}{a^2 + V(X)} < \frac{V(X)}{a^2} \iff \frac{2}{a^2 + V(X)} < \frac{1}{a^2} \iff a^2 < V(X)$$

Ainsi, l'inégalité de Cantelli est meilleure que celle de Bienaymé-Tchebychev pour les petites valeurs de a, plus précisément lorsque $a < \sigma(X)$. De plus, elle n'est intéressante que si on majore la probabilité par quelque chose de strictement inférieur à 1.

$$\frac{2V(X)}{a^2 + V(X)} < 1 \iff V(X) < a^2 \iff \sigma(X) < a$$

Finalement, cette nouvelle inégalité n'est jamais plus intéressante que celle de Bienaymé-Tchebychev.

Les inégalités obtenues ici (en question 4 et son corollaire en question 6) sont donc meilleures que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour étudier l'écart à la moyenne d'un seul coté de la moyenne, mais moins bonnes pour étudier l'écart à la moyenne en valeur absolue.

Quelques vidéos pour se cultiver:
Pour aller plus loin : Le théorème de la limite centrale.
Central Limit Theorem - - 3Blue1BRown

♣ Du trèfle à brouter...
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♥ À connaître par cœur.
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !