

## EXERCICES — CHAPITRE 30

**Exercice 1 (♥)** – Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Donner un contre-exemple à chacune des affirmations suivantes :

1. Si la série de terme général  $u_n$  converge, alors la série de terme général  $u_n^2$  converge.
2. Si la série de terme général  $u_n$  converge, alors la série de terme général  $(-1)^n u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , alors la série de terme général  $u_n$  converge.
4. Si  $u_n = o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ , alors la série de terme général  $u_n$  converge.

**Exercice 2 (♥)** – Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$  dans les cas suivants.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $u_n = e^{1/n}$                                       | 2. $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$                      | 3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$                                  |
| 4. $u_n = \frac{1}{2^n \ln(n)}$                          | 5. $u_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\right)^n$ | 6. $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 3n + 1}\right)$ |
| 7. $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ | 8. $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$                       | 9. $u_n = \frac{1}{n(\ln(n))^2}$                             |
| 10. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ (avec $o$ )                    | 11. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$                      | 12. $u_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$                |

Pour la 8., penser à une comparaison avec une intégrale.

**Indication :** Il n'est jamais nécessaire de calculer la somme de la série.

1-6 : Il faut utiliser des arguments de comparaison ou d'équivalents la plupart du temps, pour se ramener à des séries géométriques ou de Riemann classiques.

7 : Taylor-Young

8-9 : comparaison à une intégrale

10 : Multiplier  $u_n$  par  $n^2$ . Quelle est sa limite?

11 : Multiplier  $u_n$  par  $n^{3/2}$ . Quelle est sa limite?

12 : Équivalent.

**Exercice 3 (♠)** – Déterminer, en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , la nature de la série de terme général  $u_n$  dans les cas suivants.

1.  $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$
2.  $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n^{2\alpha}}\right)$
3.  $u_n = \left(\sqrt{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n}\right)^\alpha$

**Exercice 4 (♥)** – Justifier que les séries suivantes sont convergentes et déterminer leur somme.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$            | 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{4}{5^n}$   | 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$          |
| 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{2n}}$         | 5. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{5^{n-1}}$   | 6. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + 3^n}{7^n}$ |
| 7. $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{n+1}}$        | 8. $\sum_{n \geq 1} \text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ |  |
| 9. $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-2} 2^{2n}}{n!}$ | 10. $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{2n+1}}$   | 11. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$    |

**Exercice 5 (♠)** – Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  une série à termes positifs convergente.

Montrer que les séries  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{1 + a_n}$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n^2$  sont convergentes.

**Exercice 6 (♦)** –

1. Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ .
2. En vous aidant d'une décomposition en éléments simples, calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

**Exercice 7 (♦)** –

1. On note pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$ .
  - (a) Justifier que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.
  - (b) En remarquant que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .
2. (a) Décomposer en éléments simples de la fonction  $x \mapsto \frac{x-1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$ .
  - (b) Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 8 (♠) –**

- Montrer que :  $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^N x^N}{1+x} dx$ .
- En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge et que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ .

**Exercice 9 (♥) –** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

- Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 2} (u_n - u_{n-1})$  est convergente. On pourra chercher un équivalent de la suite  $(u_n - u_{n-1})_{n \geq 2}$ .
- En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente. Sa limite est appelée la constante  $\gamma$  d'Euler.

**Indication :**

- Utiliser l'équivalent obtenu dans l'exercice 1, question 7.
- Quand est-ce qu'une série télescopique converge ?

**Exercice 10 (♠) – Critère des séries alternées**

- Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle positive ou nulle qui décroît vers 0. On note  $(S_N)_{N \geq 0}$  la suite des sommes partielles associée à la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ .
  - Montrer que les suites  $(S_{2p})_{p \geq 0}$  et  $(S_{2p+1})_{p \geq 0}$  sont adjacentes.
  - En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$  converge.
- Applications.
  - Montrer que pour tout  $\alpha \in ]0; +\infty[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge.
  - Déterminer la nature de la série de terme général  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .

**Indication :**

- On revient à la définition de suite adjacente.
  - Là, je peux pas trop aider à part en donnant la réponse.
- Appliquer directement la question 1.
  - Là, il va falloir ruser. Avec une quantité conjuguée par exemple. La série diverge.

**Exercice 11 (♠) –** Soit  $f$  une fonction non-nulle continue et positive sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On considère la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 f(t^n) dt$$

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n \geq \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt$$

- En déduire la nature de la série.
- Application : Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$$

**Exercice 12 (♠) –** Soit  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit par récurrence la suite  $(u_n)$  en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .
- Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante.
- En déduire que  $u$  converge et déterminer sa limite.
- Prouver que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ .
- En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

**Exercice 13 (♥) –** Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} = 2$ .

En déduire que la famille  $\left( \frac{1}{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)_{k \in \mathbb{N}^*, n > k}$  est sommable et montrer que la somme vaut  $-\frac{1}{2}$ .

**Exercice 14 (♥) –** Soit  $\alpha \in ]2, +\infty[$ . Après avoir justifié de la sommabilité, calculer les sommes suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ ,       | 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$ ,     |
| 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ , | 4. $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ . |

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!