

EXERCICES — CHAPITRE 30

Solution 1 –

1. Considérons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est une série alternée dont les termes $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont positifs, décroissants et tendent vers 0.

Par le critère des séries alternées, elle converge.

Cependant

$$u_n^2 = \frac{1}{n}.$$

La série correspondante est la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

qui diverge.

2. Prenons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

est la série harmonique alternée, qui converge par le critère des séries alternées.

En revanche

$$(-1)^n u_n = \frac{1}{n}.$$

La série associée est alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

qui diverge (série harmonique).

3. Considérons

$$u_n = \frac{1}{n \ln n}, \quad n \geq 2.$$

On a

$$\frac{u_n}{1/n} = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc

$$u_n = o(n^{-1}).$$

Cependant la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

diverge (par le critère intégral).

4. Prenons encore

$$u_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

Alors

$$\frac{u_n}{(-1)^n/n} = \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

Comme $\ln n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\frac{(-1)^n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et donc

$$u_n = o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Cependant la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

diverge.

Solution 2 –

1. $(e^{1/n})_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0 donc $\sum e^{1/n}$ diverge grossièrement.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

3. Pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq \frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

4. Pour tout $n \geq 3$, $\ln(n) \geq 1$, donc on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Or, $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, donc par comparaisons de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.

5. Pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{4}$ et donc

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

$\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est une série géométrique convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum u_n$ converge.

6. Pour tout n entier assez grand,

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 3n + 1 + n + 2}{n^2 + 3n + 1}\right) = \ln\left(1 + \frac{n + 2}{n^2 + 3n + 1}\right).$$

$$\frac{n + 2}{n^2 + 3n + 1} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ donc}$$

$$u_n \sim \frac{n + 2}{n^2 + 3n + 1} \sim \frac{1}{n}.$$

$\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann convergente, donc par critère des équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge. (En effet, (u_n) étant équivalente à une suite strictement positive, elle est elle-même positive à partir d'un certain rang)

7. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1 + x) \leq x$, u est une suite positive.

Pour tout $n \geq 1$, à l'aide du développement limité en 0 de $t \mapsto \ln(1 + t)$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

Comme $\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, on en déduit par le critère des équivalents de séries à termes positifs que $\sum u_n$ converge.

8. Pour tout $N \geq 2$, on pose $S_N = \sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=2}^N f(n)$ avec

$$f: \begin{array}{ll} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}. \end{array}$$

f est positive, continue et décroissante sur son domaine de définition, donc par le théorème de comparaison série-intégrale, $(S_N)_{N \geq 2}$ et $\left(\int_2^N f\right)_{N \geq 2}$ sont de même nature.

Or, pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\int_2^N f = [\ln(\ln(x))]_2^N = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)).$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$, donc $\left(\int_2^N f\right)_N$ diverge vers $+\infty$ et par conséquent $(S_N)_N$ aussi.

9. Pour tout $N \geq 2$, on pose $S_N = \sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=2}^N f(n)$ avec

$$f: \begin{array}{ll} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^2}. \end{array}$$

f est positive, continue et décroissante sur son domaine de définition, donc par le théorème de comparaison série-intégrale, $(S_N)_N$ et $\left(\int_2^N f\right)_N$ sont de même nature.

Or, pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\int_2^N f = \left[\frac{-1}{\ln(x)}\right]_2^N = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N)}.$$

Donc $\left(\int_2^N f\right)_N$ converge et par conséquent $(S_N)_N$ aussi.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $N = \sqrt{n}$, on a

$$n^2 e^{-\sqrt{n}} = \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = \frac{N^4}{e^N}.$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^4}{e^N} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$ et $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère du petit o, $\sum u_n$ converge.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^{3/2} u_n = \frac{\ln(n)}{n^{1/2}}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} u_n = 0$, donc $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^{3/2}})$. $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère du petit o, $\sum u_n$ converge.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2n}} - 1 \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, on a $\sqrt{1 + \frac{1}{2n}} - 1 \sim \frac{1}{4n}$ et donc $u_n \sim \frac{1}{4\sqrt{n}}$.

Comme $\sum \frac{1}{4\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, par critère des équivalents de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Solution 3 –

- On a $\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$, donc la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ d'après la règle de l'équivalent, donc cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- On a $\sin\left(\frac{\pi}{n^\alpha}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^\alpha}$, donc $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{\pi}{n^\alpha}\right)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ d'après la règle de l'équivalent, donc cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha = n^{\alpha/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)^\alpha$$

Or, $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, puis, comme on peut élever un équivalent à la puissance α ,

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\alpha/2} \frac{1}{2^\alpha n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ d'après la règle de l'équivalent, donc cette série converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Solution 4 –

- On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \cdot \left| \frac{1}{3} \right| < 1$, donc la série est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
- On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{5} \cdot \left| \frac{1}{5} \right| < 1$, donc la série est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{5^n} = 4 \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = 5$.
- C'est une conséquence du cours d'intégration! La série converge vers e.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n}$. On est donc en présence d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4} \cdot \left| \frac{1}{4} \right| < 1$, donc la série est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.
- $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{5^{n-1}} = 5 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{5}\right)^n$. On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{2}{5} \cdot \left| \frac{2}{5} \right| < 1$, donc la série est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^{n-1}} = 5 \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{25}{3}$.
- $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + 3^n}{7^n} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{7}\right)^n + \sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{7}\right)^n$. On reconnaît deux séries géométriques de raisons $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{7}$. Comme $\left| \frac{2}{7} \right|$ et $\left| \frac{3}{7} \right|$ sont dans $[0, 1[$, ces séries sont convergentes, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + 3^n}{7^n}$ converge. D'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{7^n} = \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} + \frac{1}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{7}{5} + \frac{7}{4} = \frac{63}{20}$.
- $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$. En utilisant la première série, on en déduit que la série converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

8. On reconnaît une série télescopique : Pour tout $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \operatorname{Arctan}(2) - \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{N+1}\right)$$

Par continuité de la fonction Arctan , $\lim_{N \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{N+1}\right) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \operatorname{Arctan}(2) - \frac{\pi}{4}$$

9. $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-2} 2^{2n}}{n!} = e^{-2} \sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!}$. Or, $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!}$ est une série exponentielle convergeant vers e^4 (voir cours d'intégration), donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-2} 2^{2n}}{n!} = e^{-2} e^4 = e^2$.

10. $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{2n+1}} = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{9^n}$. On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{9} \cdot \left|\frac{1}{9}\right| < 1$, donc la série est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{2n+1}} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$.

11. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ est une série exponentielle convergeant vers e^{-1} (voir cours d'intégration).

Solution 5 – Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, pour tout $n \geq 0$, $1 + a_n \geq 1$ et donc

$$0 \leq \frac{a_n}{1 + a_n} \leq a_n.$$

Comme $\sum a_n$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{a_n}{1 + a_n}$ converge.

Comme $\sum a_n$ converge, (a_n) converge vers 0, donc, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $0 \leq a_n \leq 1$, et donc $0 \leq a_n^2 \leq a_n$.

Comme $\sum a_n$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n^2$ converge.

Solution 6 –

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$$

Or, $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc par critère des équivalents entre séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.

2. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ définie sur \mathbb{R}_+^* . Par théorème de décomposition en éléments simples, il existe un unique triplet (a, b, c) tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

Avec les techniques magiques, on trouve que $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$. Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right) \end{aligned}$$

En passant à la limite, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

Solution 7 –

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\sqrt{n+1} \geq n\sqrt{n}$ et $(n+1)\sqrt{n} \geq n\sqrt{n}$. Donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(n+1) + n\sqrt{n+1}} \\ &= u_n \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ est télescopique et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{N=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

2. (a) On remarque que $X^3 + 3X^2 + 2X = X(X+1)(X+2)$. Ce polynôme étant scindé et à racines simples, le théorème de décomposition en éléments simples nous assure qu'il existe des uniques réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$,

$$\frac{x-1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

En multipliant cette ligne par x puis en faisant tendre x vers 0, on obtient que $a = -\frac{1}{2}$. En procédant de même avec les termes $x+1$ et $x+2$, on trouve que $b = 2$ et $c = -\frac{3}{2}$.

- (b) pour tout $N \geq 1$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n-1}{n^3 + 3n^2 + 2n} &= \sum_{n=1}^N \frac{-1}{2} \times \frac{1}{n} + 2 \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{-1}{2} \times \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

On reconnaît là deux sommes télescopiques, d'où l'on déduit que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n-1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{1} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right).$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{4}.$$

Solution 8 -

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - (-1)^N x^N}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{1 - (-x)^N}{1 - (-x)} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{N-1} (-x)^k dx && \text{(c'est une somme géométrique)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 (-x)^k dx && \text{par linéarité de l'intégrale} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - (-1)^N x^N}{1+x} dx &= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} && \text{changement d'indice } n = k+1 \end{aligned}$$

2. On va donc s'intéresser à cette intégrale. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{1 - (-1)^N x^N}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{(-1)^N x^N}{1+x} dx \tag{1}$$

Le premier terme se calcule directement :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Il s'agit de montrer que l'autre intégrale de (??) tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Il nous faut donc la borner tout en gardant la dépendance en N . On passe par une valeur absolue pour éliminer le problème du $(-1)^N$.

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^N x^N}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^N x^N}{1+x} \right| dx = \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx.$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $x+1 \geq 1$, donc $\frac{1}{x+1} \leq 1$ et $\frac{x^N}{1+x} \leq x^N$. Ainsi,

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^N x^N}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^N dx = \frac{1}{N+1}.$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$, on en déduit que l'on peut passer à la limite dans (??) et que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 - (-1)^N x^N}{1+x} dx = \ln(2)$$

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Solution 9 -

1. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

A l'aide du développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right). \\ \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum (u_n - u_{n-1})$ est une série convergente.

2. Il s'agit même d'une série télescopique. D'après le cours, elle converge si et seulement si $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Solution 10 -

1. (a) Pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_{2p+2} - S_{2p} &= \sum_{n=0}^{2p+2} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2p} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2p+2} u_{2p+2} + (-1)^{2p+1} u_{2p+1} \\ &= u_{2p+2} - u_{2p+1} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_{2p+2} - u_{2p+1} \leq 0$. On en déduit que $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_{2p+3} - S_{2p+1} &= \sum_{n=0}^{2p+3} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2p+1} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2p+3} u_{2p+3} + (-1)^{2p+2} u_{2p+2} \\ &= u_{2p+2} - u_{2p+3} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_{2p+2} - u_{2p+3} \geq 0$. On en déduit que $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_{2p+1} - S_{2p} &= \sum_{n=0}^{2p+1} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2p} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2p+1} u_{2p+1} = -u_{2p+1} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 donc $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ également en tant que suite extraite. Donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2p+1} - S_{2p} = 0$ et on en déduit que $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Donc $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie. Comme il s'agit des suites extraites des termes de rangs pairs et impairs de $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et qu'elle converge vers une même limite, $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge également vers cette limite.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. La suite u ainsi définie est positive, décroissante et converge vers 0 (car $\alpha > 0$), donc $\sum (-1)^n u_n$ converge.

(b) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n(\sqrt{n} - (-1)^n)}{(\sqrt{n} + (-1)^n)(\sqrt{n} - (-1)^n)} \\ &= \frac{(-1)^n\sqrt{n} - (-1)^{2n}}{n - (-1)^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Soit la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ définie par $w_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}$. Elle est positive.

Soit $f : x \mapsto x - \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}_+^* . Alors, f est dérivable et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$, qui est positive sur \mathbb{R}_+^* , donc f est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

La composition de deux fonctions croissantes est croissante donc $x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est croissante sur \mathbb{R}_+^* et la suite $(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 2}$ est croissante. Comme elle est positive, on en déduit que w est décroissante.

$w_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$. Ainsi, d'après la question 1, $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ est convergente.

$\frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$, donc d'après la critère des équivalents de séries à termes positifs, comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, $\sum \frac{1}{n-1}$ diverge.

Finalement, en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente, $\sum v_n$ diverge.

Solution 11 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $w = t^n$ dans l'intégrale $\int_0^1 f(w) dw$.

Alors, t varie de 0 à 1 lorsque w varie de 0 à 1. On a alors $dw = nt^{n-1} dt$ et donc

$$\begin{aligned} f(w) dw &= f(t^n) n t^{n-1} dt \\ \int_0^1 f(w) dw &= n \int_0^1 f(t^n) t^{n-1} dt \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^{n-1} \leq 1$, donc $f(t^n) t^{n-1} \leq f(t^n)$ et par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 f(w) dw \leq n \int_0^1 f(t^n) dt = nu_n$$

Donc

$$u_n \geq \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt$$

- La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ par critère des séries de Riemann. Comme $\int_0^1 f(t) dt$ est une constante strictement positive, la série $\sum \frac{1}{n} \int_0^1 f$ diverge également vers $+\infty$. Ainsi, par comparaison de séries, $\sum u_n$ diverge.
- Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x^n)$ définie sur $[0, 1]$. Alors, f est non-nulle, continue et positive sur $[0, 1]$. Donc, d'après la question 2, la série de terme général $\int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ diverge.

Solution 12 –

- On procède par récurrence.
 $u_0 > 0$ par hypothèse.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors, $e^{-u_n} u_n > 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$.
Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ car $-u_n < 0$. Donc $u_{n+1} < u_n$, et donc u est décroissante.
- u est décroissante et minorée par 0, donc convergente par théorème de la limite monotone. Par continuité de la fonction exponentielle, si on note ℓ la limite de u , on a

$$\begin{aligned} \ell &= e^{-\ell} \ell \\ 1 &= e^{-\ell} \\ \ell &= 1 \end{aligned}$$

Donc u converge vers 1.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) &= \ln(u_n) - \ln(e^{-u_n}) - \ln(u_n) \\ &= -(-u_n) \\ &= u_n \end{aligned}$$

5. Pour tout $N \geq 0$, on a, en reconnaissant une somme télescopique,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln(u_0) - \ln(u_{N+1})$$

Par continuité du logarithme, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge (vers $\ln(u_0)$).

Solution 13 – On considère la double somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n}.$$

On peut inverser l'ordre de sommation (théorème de Fubini) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

La somme intérieure est une série géométrique :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Ainsi, la double somme devient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot 1 = 2.$$

On considère maintenant la famille $\left(\frac{1}{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{k \in \mathbb{N}^*, n > k}$.

Pour montrer qu'elle est sommable, on utilise le critère de sommabilité absolue.

On a :

$$\left| \frac{1}{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

La famille $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n > k}$ est sommable car la série $\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison

$\frac{1}{2} \in]-1; 1[$). La somme de la famille est donnée par :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1$ pour tout $n \geq 2$, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2^n} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \right) = - \left(1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

La famille $\left(\frac{1}{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{k \in \mathbb{N}^*, n > k}$ est donc sommable, et sa somme vaut $-\frac{1}{2}$.

Solution 14 – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On justifie d'abord la sommabilité des familles considérées, puis on calcule les sommes demandées.

Justification de la sommabilité

Pour chaque famille, on montre qu'elle est sommable en utilisant le critère de sommabilité absolue.

1. Famille $\left(\frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}, k=n}$. On considère la somme absolue :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \left| \frac{1}{k!} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

On inverse l'ordre de sommation (théorème de Fubini pour les séries à termes positifs) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!}.$$

Cette série converge car $\frac{k+1}{k!} \sim \frac{k}{k!}$ et la série $\sum \frac{k}{k!}$ converge (c'est presque une série exponentielle...).

2. Famille $\left(\frac{(-1)^k}{k^3}\right)_{n \geq 1, k=n}$. On considère la somme absolue :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^3} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

On inverse l'ordre de sommation :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

qui converge en tant que série de Riemann convergente.

3. Famille $\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*, k=n}$. On considère la somme absolue :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

On inverse l'ordre de sommation :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Cette série converge si et seulement si $\alpha > 2$.

4. Famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{m \geq 1, n \geq 1}$ On remarque que $(m+n)^2 \geq 4mn$ (par l'inégalité arithmético-géométrique), donc $(m+n)^\alpha \geq (4mn)^{\alpha/2}$ et $\frac{1}{(m+n)^\alpha} \leq \frac{1}{(4mn)^{\alpha/2}}$.

Ainsi,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \leq \frac{1}{4^{\alpha/2}} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{\alpha/2}}\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}\right).$$

Les séries $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{\alpha/2}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ convergent si et seulement si $\alpha/2 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$.

Donc, pour $\alpha > 2$, la famille est sommable.

Calcul des sommes

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ On inverse l'ordre de sommation (théorème de Fubini) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!}.$$

Or, on sait que $\frac{k+1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!}$ pour $k \geq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = e + e = 2e.$$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$ On inverse l'ordre de sommation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^k}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \cdot k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Cette somme est connue et vaut $-\frac{\pi^2}{12}$.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 2$ On inverse l'ordre de sommation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^\alpha} = \zeta(\alpha - 1).$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann.

4. $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ pour $\alpha > 2$ On utilise la symétrie et l'inversion de l'ordre de sommation :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^\alpha}.$$

On peut écrire :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}} = \zeta(\alpha) - 1 + \zeta(\alpha - 1) - 1.$$

Ainsi, la somme vaut $\zeta(\alpha) + \zeta(\alpha - 1) - 2$.

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!