

EXERCICES — CHAPITRE 2

Exercice 1 (♣) – Écrire ces nombres sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ B = 2 - \frac{13}{7} + \left(1 + \frac{5}{2}\right) \\ C = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} D = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) \\ E = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}} \end{array} \right.$$

Exercice 2 (♣) – Écrire les nombres suivants sous la forme d'une unique fraction la plus simple possible.

$$\begin{array}{l} A(x) = \frac{3(x+1)}{2(x+1)(x+2)} \\ B(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} C(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{4x-2} \\ D(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} \end{array} \right.$$

Exercice 3 (♣) – Simplifier les nombres et expressions suivants.

$$\begin{array}{l} A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3 \\ B = \frac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5} \\ C = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4 \\ D = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} E = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} \\ F = \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3} \\ G = \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} H = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \\ I = (a^3)^2 \times a^{-4} \\ J = a^2 b^{-3} (ab)^4 \end{array} \right.$$

Exercice 4 (♣) – Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$\begin{array}{l} A = \sqrt{12} \\ B = \sqrt{48} \\ C = \sqrt{36+64} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} D = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ E = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} \\ F = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\frac{98}{25}} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} G = \frac{3}{\sqrt{3}} \\ H = (2 - \sqrt{3})^2 \\ I = 3(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) \end{array} \right.$$

Exercice 5 (♦) – Rendre entiers les dénominateurs des expressions suivantes.

$$\begin{array}{l} A = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \\ B = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \\ C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ D = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} E = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ F = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \\ G = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ H = \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2 \end{array} \right.$$

Exercice 6 (♠) – Soit \mathbb{K} l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que, si x et y sont dans \mathbb{K} , il en est de même de $x - y$, xy et, si $x \neq 0$, de $\frac{1}{x}$.

Exercice 7 (♣) – Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. 5x - 9 = 3x + 4, \\ 2. x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. \frac{4}{5}x + 4 = -\frac{2}{3}, \\ 4. 4(x-2) - 3[6-2(3-4x)] + 3(7-2x) = 0. \end{array} \right.$$

Exercice 8 (♣) – Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes et factoriser si possible le trinôme du second degré associé.

$$\begin{array}{l} 1. x^2 + 5x + 6 = 0, \\ 2. x^2 + x + 1 = 0, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. -2x^2 + 3x + 1, \\ 4. 4x^2 + 12x + 9 = 0. \end{array} \right.$$

Exercice 9 (♣) – Résoudre les inéquations suivantes.

$$\begin{array}{l} 1. x^2 - 2x + 1 > 0 \\ 2. -3x^2 + 5x - 2 \leq 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ 4. -2x^2 + 5x \leq 2 \end{array} \right.$$

Exercice 10 (♣) – Résoudre les équations suivantes.

$$\begin{array}{l} 1. x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \\ 2. x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. 9x^4 - 85x^2 + 196 = 0 \\ 4. x^4 - x^2 - 2 = 0 \end{array} \right. \quad \left| \quad 5. x^2 + \frac{1}{x^2} - 6 = 0$$

Exercice 11 (♣) – Résoudre sur \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$x^4 + x^2 + x = x \quad \left| \quad \sqrt{x+3} = x+2 \quad \left| \quad \frac{2x+1}{x-1} \leq x+1$$

Exercice 12 (♦) – Résoudre les équations suivantes.

$$\begin{array}{l|l} 1. \frac{7}{x+1} = \frac{2}{x} & 4. \frac{3}{x} = \frac{x-1}{x+1} \\ 2. \frac{x+1}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-4} & 5. 2x = \frac{3x-5}{x-2} \\ 3. \frac{-2x-1}{x+1} = \frac{2x-3}{1-x} & 6. \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Exercice 13 (♥) – Soit $x \in [1, 2]$. Montrer que $\frac{1}{(x-4)^2} \in [0, 1]$.

Exercice 14 (♥) –

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + \frac{1}{2} \geq 0$.
- En déduire que pour tous nombres réels a et b , $a + b \leq (1 + a^2)(1 + b^2)$.

Exercice 15 (♥) –

- Montrer que pour tous nombres réels a et b , on a : $ab \leq (a^2 + b^2)/2$.
- En déduire que pour tous nombres réels a , b et c , on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Exercice 16 (♥) –

- Montrer que pour tout entier $n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n}.$$

- Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

- Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 17 (♣) – Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \geq 8.$$

Exercice 18 (♥) – Montrer les inégalités suivantes :

- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$

Exercice 19 (♣) – Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{l|l} 1. \sqrt{1-x^2} = 2x+1. & 4. |x-1| \leq |x-2|. \\ 2. \sqrt{1-x^2} > 2x+1. & 5. |x-1| + |2x-7| + |x+3| < 6. \\ 3. \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 1. & 6. \left| x + \frac{1}{x} \right| > 3. \end{array}$$

Exercice 20 (♦) – Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance entre $f(x)$ et 0 est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 21 (♦) – On cherche à résoudre l'équation d'inconnue x réelle :

$$(E) : x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$$

- Soit $x \neq 0$. Justifier que

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0 \iff x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

- Soit $x \neq 0$. On pose $u = x + \frac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x .
- Résoudre (E) .

Exercice 22 (♥) – Soit m un réel et (E_m) l'équation

$$(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$$

d'inconnue réel x .

- Résoudre les équations (E_0) et (E_1) .
- Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 0$ comme solution? Donner l'éventuelle autre solution.
- Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle :
 - une unique solution?
 - deux solutions distinctes?
 - aucune solution réelle?

Exercice 23 (♠) –

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq \sqrt{|x+y|}.$$

Exercice 24 (♠) – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$.

Montrer que pour tous réels x et y , on a $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.

Exercice 25 (♠) – Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 26 (♠) – Soient a et b deux réels. On note $\max(a, b)$ le plus grand de ces deux nombres et $\min(a, b)$ le plus petit.

- Dessiner la droite réelle. Y placer les points d'abscisses a , b et $\frac{a+b}{2}$. Quelle longueur représente le réel $\left| \frac{a-b}{2} \right|$?
- À l'aide du dessin, conjecturer une expression de $\max(a, b)$ et une expression de $\min(a, b)$ ne faisant intervenir que $\frac{a+b}{2}$ et $\left| \frac{a-b}{2} \right|$.
- Démontrer cette conjecture.

Exercice 27 (♣) – Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\lfloor 3x - 1 \rfloor = 7$

2. $5 \lfloor -4x + 1 \rfloor^2 = 9$

3. $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatrice, risque de rester sur le carreau!