

EXERCICES — CHAPITRE 2

Solution 1 – Il s'agit dans cet exercice d'appliquer les règles de manipulation des fractions tout en faisant bien attention aux règles de priorité de calcul.

$$\begin{aligned}
 \bullet A &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6 \times 1}{6 \times 2} - \frac{4 \times 1}{4 \times 3} + \frac{3 \times 1}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6-4+3}{12} = \frac{5}{12} \\
 \bullet B &= 2 - \frac{13}{7} + \left(1 + \frac{5}{2}\right) = 2 - \frac{13}{7} + \left(\frac{2}{2} + \frac{5}{2}\right) = 2 - \frac{13}{7} + \frac{7}{2} = \frac{28}{14} - \frac{26}{14} + \frac{49}{14} = \frac{51}{14} \\
 \bullet C &= \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{8}{12} - \frac{9}{12}\right) + 3\left(\frac{24}{30} - \frac{25}{30}\right) = -\frac{1}{12} + 3 \times \left(-\frac{1}{30}\right) \\
 &= -\frac{1}{12} - \frac{3}{30} = -\frac{5}{60} - \frac{6}{60} = -\frac{11}{60} \\
 \bullet D &= \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6}\right) \times \left(\frac{12}{4} + \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{3}{6} - \frac{5}{6}\right) = \frac{13}{6} \times \frac{19}{4} \div \frac{-2}{6} \\
 &= \frac{13}{6} \times \frac{19}{4} \times \frac{6}{-2} = \frac{13 \times 19}{4 \times (-2)} = -\frac{247}{8} \\
 \bullet E &= \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{8}{15} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{40}{60} + \frac{45}{60} - \frac{36}{60}}{\frac{8}{15} + \frac{5}{15}} = \frac{\frac{49}{60}}{\frac{13}{15}} = \frac{49}{60} \times \frac{15}{13} = \frac{49}{4 \times 13} \times \frac{15}{13} = \frac{49}{52}
 \end{aligned}$$

Solution 2 –

$$\begin{aligned}
 \bullet A(x) &= \frac{3(x+1)}{2(x+1)(x+2)} = \frac{3}{2(x+2)} \\
 \bullet B(x) &= \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{x^2+4}{2x} \\
 \bullet C(x) &= \frac{1}{2x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{4x-2} = \frac{2(x+1)}{2(x+1)(2x-1)} + \frac{2x(2x-1)}{2(x+1)(2x-1)} + \frac{x^2(x+1)}{2(x+1)(2x-1)} \\
 &= \frac{2x+2+4x^2-2x+x^3+x^2}{2(x+1)(2x-1)} = \frac{x^3+5x^2+2}{2(x+1)(2x-1)} \\
 \bullet D(x) &= \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)} \\
 &= \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}
 \end{aligned}$$

Solution 3 – Il s'agit dans cet exercice d'appliquer les formules sur le calcul de puissances.

$$\begin{aligned}
 \bullet A &= 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3 = 3^{2-4+7+1} = 3^6 \\
 \bullet B &= \frac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5} = \frac{2^{1+2+3}}{2^{4+5}} = \frac{2^6}{2^9} = 2^{6-9} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \\
 \bullet C &= (2 \times 3^2 \times 3^3)^4 = (2 \times 3^5)^4 = 2^4 \times (3^5)^4 = 2^4 \times 3^{5 \times 4} = 2^4 \times 3^{20} \\
 \bullet D &= \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2} = 2^{3-1} \times 5^{4-3} \times 7^{3-2} = 2^2 \times 5 \times 7 \\
 \bullet E &= 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} = (3^4)^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{3^2} = 3^{4 \times 5} \times 3^{(-2) \times (-5)} \times \frac{1}{3^2} \\
 &= 3^{20} \times 3^{10} \times 3^{-2} = 3^{20+10-2} = 3^{28} \\
 \bullet F &= \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3} = \frac{(2^2)^{-2} \times (2^3)^3}{(2^4)^3} = \frac{2^{-4} \times 2^9}{2^{12}} = 2^{-4+9-12} = 2^{-7} = \frac{1}{2^7} \\
 \bullet G &= \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4} = \frac{(3^2)^3 \times (3^3)^2 \times 3 \times 5^2}{5^2 \times 3^4} = 3^{6+6+1-4} \times 5^{2-2} = 3^9 \times 5^0 = 3^9 \\
 \bullet H &= \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{2^{11}}{3^{11}} \times \frac{3^{10}}{2^{10}} = 2^{11-10} \times 3^{10-11} = 2^1 \times 3^{-1} = \frac{2}{3} \\
 \bullet I &= (a^3)^2 \times a^{-4} = a^{6-4} = a^2 \\
 \bullet J &= a^2 b^{-3} (ab)^4 = a^2 b^{-3} a^4 b^4 = a^6 b^1 = a^6 b
 \end{aligned}$$

Solution 4 –

$$\begin{aligned}
 \bullet A &= \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\
 \bullet B &= \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\
 \bullet C &= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \\
 \bullet D &= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (3+8-5)\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\
 \bullet E &= 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} = 5\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{16 \times 3} = 5\sqrt{9} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{16} \times \sqrt{3} = 15\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \\
 \bullet F &= \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\frac{98}{25}} = \frac{9}{\sqrt{121 \times 2}} \times \frac{\sqrt{49 \times 2}}{5} = \frac{9}{11\sqrt{2}} \times \frac{7\sqrt{2}}{5} = \frac{9 \times 7}{11 \times 5} = \frac{63}{55} \\
 \bullet G &= \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \\
 \bullet H &= 2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \\
 \bullet I &= 3(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 3(1^2 - (\sqrt{2})^2) = 3(1 - 2) = 3 \times (-1) = -3
 \end{aligned}$$

Solution 5 –

$$\begin{aligned}
\bullet A &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\
\bullet B &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3-2\sqrt{2} \\
\bullet C &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}-(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-\sqrt{6}+\sqrt{15}-\sqrt{10}}{3-2} \\
&= -2+3+\sqrt{15}-\sqrt{10} = 1+\sqrt{15}-\sqrt{10} \\
\bullet D &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-(\sqrt{2})^2}{3-2} = \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2 \\
\bullet E &= \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}. \\
\bullet F &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}+3}{-2} \\
\bullet G &= \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(5+2\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} + \frac{(5-2\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{18}-2\sqrt{12}}{3-2} + \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{2-3} \\
&= 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{18}-2\sqrt{12}-5\sqrt{2}-5\sqrt{3}+2\sqrt{12}+2\sqrt{18} = -10\sqrt{2}+4\sqrt{18} \\
&= -10\sqrt{2}+12\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\
\bullet H &= \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \right)^2 = \frac{5^2 \times (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{25 \times 2}{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2} = \frac{50}{4+2\sqrt{3}} \\
&= \frac{50(4-2\sqrt{3})}{4^2-2^2 \times (\sqrt{3})^2} = \frac{50(4-2\sqrt{3})}{16-12} = \frac{25(4-2\sqrt{3})}{2} = 25(2-\sqrt{3}) = 50-25\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Solution 6 – Soient $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ avec a, b, c, d dans $\mathbb{Q}$.

- Tout d'abord,

$$x - y = a + b\sqrt{2} - c - d\sqrt{2} = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}.$$

Ainsi, $x - y$ est de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $A = a - c$ et $B = b - d$. On a bien $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $x - y \in \mathbb{K}$.

- Ensuite,

$$xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = ac + 2bd + \sqrt{2}(ad + bc)$$

ce qui est aussi de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $A = ac + 2bd$ et $B = ad + bc$. On a bien $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $xy \in \mathbb{K}$.

- Enfin, si $x \neq 0$ alors $(a, b) \neq (0, 0)$ et $a - b\sqrt{2} \neq 0$ (en effet, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel...), donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \\
&= \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Cette expression est encore de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $A = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $B = \frac{b}{a^2 - 2b^2}$. On

a bien $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{K}$.

Solution 7 –

- L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$5x - 9 = 3x + 4 \iff 5x - 3x = 4 + 9 \iff 2x = 13 \iff x = \frac{13}{2}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{13}{2} \right\}$.

- L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \iff x = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \iff x = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{17}{12} \right\}$.

- L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{4}{5}x + 4 = -\frac{2}{3} \iff \frac{4}{5}x = -\frac{2}{3} - 4 \iff \frac{4}{5}x = -\frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{14}{3} \iff x = -\frac{14}{3} \times \frac{5}{4} = -\frac{70}{12} = -\frac{35}{6}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{35}{6} \right\}$.

- L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
4(x-2) - 3(6-2(3-4x)) + 3(7-2x) &= 0 \iff 4x - 8 - 3(6-6+8x) + 21 - 6x = 0 \\
&\iff 4x - 8 - 24x + 21 - 6x = 0 \iff -26x + 13 = 0 \\
&\iff -26x = -13 \iff x = \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Solution 8 –

1. L'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Ainsi, l'équation admet deux solutions qui sont données par :

$$x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-2; -3\}$.

2. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Ainsi, l'équation n'admet aucune solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. L'équation $-2x^2 + 3x + 1 = 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 9 + 8 = 17 > 0$. Ainsi, l'équation admet deux solutions qui sont données par :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 + \sqrt{17}}{4}; \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \right\}$.

4. L'équation $4x^2 + 12x + 9 = 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 144 - 144 = 0$. Ainsi, l'équation admet une solution qui est donnée par :

$$x_0 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

Solution 9 –

1. L'inéquation $x^2 - 2x + 1 > 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 4 - 4 = 0$. Ainsi, il y a une unique racine donnée par : $x_0 = 1$. Et le tableau de signes est donc donné par :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	0	+

Ainsi on déduit que $x^2 - 2x + 1 > 0 \iff x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

2. L'inéquation $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1$. Ainsi, il y a deux racines qui sont : $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = 1$. On en déduit le tableau de signe de $3x^2 - 5x + 2$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$	
$3x^2-5x+2$	+	0	-	0	+

Ainsi $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0 \iff 3x^2 - 5x + 2 \geq 0 \iff x \in \left] -\infty, \frac{2}{3} \right] \cup [1, +\infty[$. Donc

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{2}{3} \right] \cup [1, +\infty[.$$

3. L'inéquation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On commence par établir le tableau de signe de $x^2 - 4x - 4$.

Pour cela, calculons le discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 16 + 16 = 32 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{32}}{2} = \frac{4 - \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{Et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{32}}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	$2-2\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2}$	$+\infty$	
x^2-4x-4	+	0	-	0	+

Ainsi

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, 2 - 2\sqrt{2} \right] \cup \left[2 + 2\sqrt{2}, +\infty \right[.$$

4. L'inéquation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$-2x^2 + 5x \leq 2 \iff -2x^2 + 5x - 2 \leq 0$$

Calculons le discriminant de cette inéquation $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 25 - 16 = 9 > 0$.

Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{-4} = \frac{-5 - 3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \text{ Et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{-4} = \frac{-5 + 3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$x^2 - 4x - 4$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi

$$S = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [2, +\infty[.$$

Solution 10 – Pour toutes les équations ci-dessous, l'idée est de poser $X = x^2$. Cela permet de se ramener à des équations de la forme $aX^2 + bX + c = 0$ que l'on sait résoudre. Il suffira alors de résoudre $x^2 = X$ pour les solutions x de l'équation initiale.

1. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2$. On a : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \iff X^2 - 13X + 36 = 0$. On a alors une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -13$ et $c = 36$. On calcule le discriminant

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 169 - 144 = 25 > 0.$$

Il y a donc deux solutions (pour X)

$$X_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{13 - 5}{2} = 4 \text{ Et } X_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{13 + 5}{2} = 9.$$

Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = 4$ et $x^2 = X_2 = 9$.

Or $x^2 = X_1 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$ et $x^2 = X_2 = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$. Ainsi $S = \{-3, -2, 2, 3\}$.

2. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2$. On a : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \iff X^2 - 5X + 4 = 0$. On a alors une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 4$. On calcule le discriminant

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0.$$

Il y a donc deux solutions (pour X)

$$X_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5 - 3}{2} = 1 \text{ Et } X_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5 + 3}{2} = 4.$$

Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = 1$ et $x^2 = X_2 = 4$.

Or $x^2 = X_1 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$ et $x^2 = X_2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $S = \{-2, -1, 1, 2\}$.

3. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2$. On a : $9x^4 - 85x^2 + 196 = 0 \iff 9X^2 - 85X + 196 = 0$. On a alors une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 9$, $b = -85$ et $c = 196$. On calcule le discriminant

$$\Delta = (-85)^2 - 4 \times 9 \times 196 = 85^2 - (2 \times 3 \times 14)^2 = 85^2 - 84^2 = (85 - 84) \times (85 + 84) = 169 > 0.$$

Il y a donc deux solutions (pour X)

$$X_1 = \frac{-(-85) - \sqrt{169}}{2 \times 9} = \frac{85 - 13}{18} = 4 \text{ Et } X_2 = \frac{-(-85) + \sqrt{169}}{2 \times 9} = \frac{85 + 13}{18} = \frac{49}{9}.$$

Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = 4$ et $x^2 = X_2 = \frac{49}{9}$.

Or $x^2 = X_1 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$ et $x^2 = X_2 = \frac{49}{9} \iff x = \frac{7}{3}$ ou $x = -\frac{7}{3}$.

Ainsi $S = \left\{ -\frac{7}{3}, -2, 2, \frac{7}{3} \right\}$.

4. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Posons $X = x^2$. On a : $x^2 + \frac{1}{x^2} - 6 = 0 \iff x^4 + x^2 - 6 = 0 \iff X^2 + X - 6 = 0$. On a une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$. On calcule le discriminant

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0.$$

Il y a donc deux solutions (pour X)

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \text{ Et } X_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 5}{2} = 2.$$

Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = -3$ et $x^2 = X_2 = 2$.
Or $x^2 = X_1 = -3$ n'a pas de solutions puisqu'un carré ne peut pas être négatif.

Et $x^2 = X_2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Ainsi $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Solution 11 –

1. Les deux termes de l'équation $x^4 + x^2 + x = x$ sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + x = x &\iff x^4 + x^2 = 0 \\ &\iff x^2(x^2 + 1) = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \text{ et } x^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 > 0$. Donc $x^4 + x^2 + x = x \iff x = 0$.

La seule solution réelle de $x^4 + x^2 + x = x$ est donc 0.

2. $\sqrt{x+3}$ est bien défini si et seulement si $x \geq -3$. Pour $x \in [-3; -2[$, les deux termes de l'équation sont non-nuls et de signes opposés donc ne peuvent être égaux.

Soit x réel supérieur à -2 . Alors

$$\sqrt{x+3} = x+2 \iff x+3 = (x+2)^2.$$

Attention, l'implication $x+3 = (x+2)^2 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+2$ n'est vraie que parce que $\sqrt{x+3}$ et $x+2$ sont de même signe pour $x \geq -2$.

$$\sqrt{x+3} = x+2 \iff x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $x^2 + 3x + 1$ est $\Delta = 5$. Donc ce polynôme a deux racines réelles $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

$x_1 < -2$, donc x_1 n'est pas solution de $\sqrt{x+3} = x+2$.

$x_2 \geq -2$, donc x_2 est bien solution de $\sqrt{x+3} = x+2$.

$\sqrt{x+3} = x+2$ admet une unique solution réelle : $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

3. Les termes de l'équation sont bien définis lorsque $x-1 \neq 0$, c'est à dire lorsque $x \neq 1$.

Soit $x \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} \leq x+1 &\iff \frac{2x+1}{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x+1-(x^2-1)}{x-1} \leq 0 \\ &\iff \frac{-x^2+2x+2}{x-1} \leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $-x^2 + 2x + 2$ est $\Delta = 12$. Ses racines sont $x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{-2} = 1 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

On peut alors donner le tableau de signe de l'expression $\frac{-x^2+2x+2}{x-1}$ en fonction de x

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$-x^2+2x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x^2+2x+2}{x-1}$	$+$	0	$-$	$+$	0

On déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est

$[1 - \sqrt{3}; 1[\cup [1 + \sqrt{3}; +\infty[.$

Solution 12 –

1. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{7}{x+1} &= \frac{2}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{x+1} - \frac{2}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{7x}{x(x+1)} - \frac{2(x+1)}{x(x+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{7x-2(x+1)}{x(x+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5x-2}{x(x+1)} &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs $5x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$ et cette solution ne fait pas partie des valeurs interdites,

$$\text{donc } \boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{5} \right\}}.$$

2. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{x+1}{x+2} + \frac{3}{x-2} &= \frac{4}{x^2-4} \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} + \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} + \frac{3}{(x+2)(x-2)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+x-2+3x+6-4}{(x+2)(x-2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x+2)(x-2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = 0 \text{ car } x \neq -2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, $x=0$ ne fait pas partie des valeurs interdites, donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$.

3. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{-2x-1}{x+1} &= \frac{2x-3}{1-x} \\ \Leftrightarrow \frac{-2x-1}{x+1} - \frac{2x-3}{1-x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(-2x-1)(1-x) - (2x-3)(x+1)}{(x+1)(1-x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2x+2x^2-1+x - (2x^2+2x-3x-3)}{(x+1)(1-x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2x+2x^2-1+x-2x^2-2x+3x+3}{(x+1)(1-x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)(1-x)} &= 0 \end{aligned}$$

Pour que cette fraction soit nulle, il faudrait que 2 s'annule, ce qui est impossible. Donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}.$$

4. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{3}{x} &= \frac{x-1}{x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{x-1}{x+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3(x+1) - x(x-1)}{x(x+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3x+3 - (x^2-x)}{x(x+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+3}{x(x+1)} &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour résoudre l'équation $-x^2+4x+3=0$, on calcule son discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 + 12 = 28 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{-2} = 2 + \sqrt{7} \text{ Et } x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{-2} = 2 - \sqrt{7}.$$

En effet, $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2 \times \sqrt{7}$.

Comme aucune des deux solutions x_1 et x_2 n'est valeur interdite, alors

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}\}}.$$

5. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } 2x &= \frac{3x-5}{x-2} \\
 \Leftrightarrow 2x - \frac{3x-5}{x-2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{2x(x-2) - (3x-5)}{x-2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x - 3x + 5}{x-2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-2} &= 0
 \end{aligned}$$

Pour résoudre $2x^2 - 7x + 5 = 0$, on calcule le discriminant : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 49 - 40 = 9 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ Et } x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Comme aucune de ces deux solutions n'est valeur interdite, alors $\mathcal{S} = \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$.

6. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} &= \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{4} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{3 \times 4x}{4x^2} + \frac{4 \times 4}{4x^2} - \frac{1 \times x^2}{4x^2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 12x + 16}{4x^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Pour résoudre $-x^2 + 12x + 16 = 0$, on calcule le discriminant : $\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times 16 = 144 + 64 = 208 > 0$. Il y a deux racines

$$x_1 = \frac{-12 - \sqrt{208}}{2 \times (-1)} \text{ Et } x_2 = \frac{-12 + \sqrt{208}}{2 \times (-1)}.$$

Or $\sqrt{208} = \sqrt{4 \times 52} = \sqrt{4} \times \sqrt{52} = 2\sqrt{52} = 2\sqrt{4 \times 13} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2 \times 2\sqrt{13} = 4\sqrt{13}$.
Donc

$$x_1 = \frac{-12 - 4\sqrt{13}}{-2} = 6 + 2\sqrt{13} \text{ Et } x_2 = \frac{-12 + 4\sqrt{13}}{-2} = 6 - 2\sqrt{13}.$$

Comme aucune de ces deux solutions n'est valeur interdite, alors

$$\mathcal{S} = \left\{6 - 2\sqrt{13}, 6 + 2\sqrt{13}\right\}.$$

Solution 13 – On part de $1 \leq x \leq 2$. Alors,

$$-3 \leq x - 4 \leq -2$$

Comme la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on a que $9 \geq (x-4)^2 \geq 4$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(x-4)^2} \leq \frac{1}{4}$$

D'où $\frac{1}{(x-4)^2} \in \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right] \subset [0, 1]$.

Solution 14 –

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \geq 0.$$

2. Soient a et b réels. Alors,

$$\begin{aligned}
 (1+a^2)(1+b^2) &\geq 1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 \\
 &\geq 1 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2b^2 \\
 &\geq a + b + a^2b^2 \\
 (1+a^2)(1+b^2) &\geq a + b
 \end{aligned}$$

Solution 15 –

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a-b)^2 \geq 0$, donc

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0.$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab.$$

2. $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 + b^2) \geq ac + ab + bc$.

Solution 16 –

1. Je commence par exprimer les différences à gauche et à droite en une seule fraction afin de les comparer. Alors en mettant au même dénominateur, j'obtiens que pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k} \\
 \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} &= \frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque k est positif, alors

$$k^2 - k \leq k^2 \leq k^2 + k.$$

D'où en passant à l'inverse (tous les termes étant strictement positifs),

$$\frac{1}{k^2 + k} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. Je sais que $e \approx 2.7 \leq 3$. Ainsi pour tout $n \geq 3$,

$$\ln(n) \geq \ln(3) \geq \ln(e) = 1.$$

Il ne me reste plus qu'à retrouver l'encadrement souhaité.

En multipliant par 4^n , j'obtiens

$$4^n \ln(n) \geq 4^n.$$

Puis en passant à l'inverse, j'obtiens

$$\frac{1}{4^n \ln(n)} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Finalement en multipliant par 5, j'obtiens

$$\frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n}.$$

Par ailleurs, puisque $n \geq 3 > 1$, alors $\frac{5}{4^n \ln(n)} \geq 0$. En conclusion, j'ai bien montré que pour tout $n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n}.$$

3. Je multiplie les deux termes de l'inégalité par l'expression conjuguée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \leq \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2 \leq \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow k+1 - k \leq \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} \geq 0$ donc $\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \geq \sqrt{k}$ et alors

$$\frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}} \geq 1.$$

En raisonnant par équivalence, j'ai bien montré que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Solution 17 – Je commence par simplifier l'expression de l'inégalité.

$$\begin{aligned} f(x) \geq 8 &\Leftrightarrow x + \frac{16}{x} - 8 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x \times x + 16 - 8x}{x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 8x + 16}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

À ce moment, je reconnais en $x^2 - 8x + 16$ une identité remarquable :

$$x^2 = x^2, \quad 16 = 4^2 \text{ Et } -8x = -2 \times x \times 4.$$

Ainsi j'ai montré que $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$ et je peux désormais connaître le signe de tous les facteurs de l'expression. J'en déduis le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$(x-4)^2$	+	+	0	+
x	-	0	+	+
$\frac{x^2 - 8x + 16}{x}$	-	+	0	+

D'après le tableau de signe, j'ai bien montré que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\frac{x^2 - 8x + 16}{x} \geq 0$,

i.e. $f(x) \geq 8$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution 18 – (1) Pour $a, b \geq 0$, on a $a + b \leq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

La fonction $\sqrt{}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(2) On peut supposer $a \geq b$ sans perte de généralité, les deux membres de l'inégalité étant

des expressions symétriques en a et b .

Il s'agit donc de vérifier que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$.

Ceci découle de l'inégalité (1), appliquée aux réels $a-b$ et b .

Solution 19 –

a) $\sqrt{1-x^2}$ est bien défini lorsque $x \in [-1; 1]$.

Soit $x \in [-1; 1]$.

Analyse : Si $\sqrt{1-x^2} = 2x+1$, alors

$$1-x^2 = (2x+1)^2$$

$$1-x^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$0 = 5x^2 + 4x$$

$$0 = x(5x+4)$$

Donc $x = 0$ ou $x = \frac{-4}{5}$.

Synthèse : $\sqrt{1-0^2} = 1 = 2 \times 0 + 1$, donc 0 est solution.

$$\sqrt{1-\left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \neq \frac{-3}{5} = \frac{-8}{5} + 1 = 2 \times \left(\frac{-4}{5}\right) + 1.$$

Donc $\frac{-4}{5}$ n'est pas solution.

Conclusion : 0 est la seule solution.

b) Soit $x \in [-1; 1]$.

Si $x < \frac{-1}{2}$, alors $2x+1 < 0$, donc $\sqrt{1-x^2} > 2x+1$, donc x est solution.

Si $x \geq \frac{-1}{2}$, alors $\sqrt{1-x^2}$ et $2x+1$ sont positifs, donc

$$\sqrt{1-x^2} > 2x+1 \iff 1-x^2 > 4x^2 + 4x + 1$$

$$\iff 5x^2 + 4x < 0$$

$$\iff x(5x+4) < 0$$

$$\iff x \in \left] \frac{-4}{5}; 0 \right[$$

Donc l'ensemble des solutions appartenant à $\left[\frac{-1}{2}; 1 \right]$ est $\left[\frac{-1}{2}; 0 \right[$.

Donc l'ensemble des solutions est $[-1; 0[$.

c) L'équation est bien définie lorsque $x+3 \geq 0$ et $x+1 \geq 0$, soit lorsque $x \in [-1; +\infty[$.

Soit $x \in [-1; +\infty[$.

Alors, $x+3 \geq 2$, donc $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2}$ et $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{2}$.

Donc il n'y a pas de solutions.

d) L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme une valeur absolue est toujours positive, on a

$$\begin{aligned} |x-1| \leq |x-2| &\iff (x-1)^2 \leq (x-2)^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 4x + 4 \\ &\iff x \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$.

Autre méthode :

- Si $x \geq 2$, alors

$$|x-1| \leq |x-2| \iff x-1 \leq x-2 \iff -1 \leq -2 \iff \text{Faux.}$$

- Si $x \in [1; 2]$, alors

$$|x-1| \leq |x-2| \iff x-1 \leq -(x-2) \iff 2x \leq 3 \iff x \leq \frac{3}{2}.$$

- Si $x \leq 1$, alors

$$|x-1| \leq |x-2| \iff -(x-1) \leq -(x-2) \iff 1 \leq 2 \iff \text{Vrai.}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$.

e) L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-3	1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$2x-7$	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+

- Si $x \geq \frac{7}{2}$, alors

$$\begin{aligned} |x-1| + |2x-7| + |x+3| < 6 &\iff x-1+2x-7+x+3 < 6 \\ &\iff 4x-4 < 11 \\ &\iff x < \frac{11}{4} \iff \text{Faux.} \end{aligned}$$

- Si $x \in \left[1; \frac{7}{2}\right]$, alors

$$\begin{aligned} |x-1| + |2x-7| + |x+3| < 6 &\iff x-1-2x+7+x+3 < 6 \\ &\iff 9 < 6 \iff \text{Faux.} \end{aligned}$$

- Si $x \in [-3; 1]$, alors

$$\begin{aligned} |x-1| + |2x-7| + |x+3| < 6 &\iff -x+1-2x+7+x+3 < 6 \\ &\iff -x < -3 \\ &\iff x > 3 \iff \text{Faux.} \end{aligned}$$

- Si $x \leq -3$, alors

$$\begin{aligned} |x-1| + |2x-7| + |x+3| < 6 &\iff -x+1-2x+7-x-3 < 6 \\ &\iff -4x < 1 \\ &\iff x > \frac{-1}{4} \iff \text{Faux.} \end{aligned}$$

Donc il n'y a pas de solutions.

f) Les termes de l'équation sont bien définis si et seulement si $x \neq 0$.

- Soit $x > 0$. Alors x et $\frac{1}{x}$ sont positifs, donc

$$\begin{aligned} \left|x + \frac{1}{x}\right| > 3 &\iff x + \frac{1}{x} > 3 \\ &\iff x^2 + 1 > 3x \\ &\iff x^2 - 3x + 1 > 0 \end{aligned}$$

où la deuxième équivalence est justifiée par le fait que x est positif. Le discriminant de $x^2 - 3x + 1$ est $\Delta = 5$ et ses racines sont $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

L'ensemble des solutions positives de f) est donc

$$\left]0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$$

- Soit $x < 0$. Alors $\left|-x + \frac{1}{-x}\right| = \left|x + \frac{1}{x}\right|$. Donc x est solution de f) si et seulement si $-x$ est solution de f). D'après le premier point, on en déduit l'ensemble des solutions négatives de f) est donc

$$\left]-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0\right[.$$

- L'ensemble des solutions de f) est donc

$$\left]-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[.$$

Solution 20 – La distance entre $f(x)$ et 0 est $|f(x)-0|$. On demande donc de résoudre $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, d'inconnue x réelle. Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq \frac{1}{2} &\iff \left|\frac{2x+1}{2x}\right| \leq \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{2x+1}{2x} \geq -\frac{1}{2} \text{ Et } \frac{2x+1}{2x} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Résolvons les deux inéquations obtenues.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{2x} \geq -\frac{1}{2} &\iff \frac{2x+1}{2x} + \frac{1}{2} \geq 0 \\ &\iff \frac{2x+1}{2x} + \frac{x}{2x} \geq 0 \\ &\iff \frac{3x+1}{2x} \geq 0. \end{aligned}$$

Or,

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$3x+1$	-	0	+	+
$2x$	-	-	0	+
$\frac{3x+1}{2x}$	+	0	-	+

Donc,

$$\frac{2x+1}{2x} \geq -\frac{1}{2} \iff x \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup]0, +\infty[.$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{2x} &\leq \frac{1}{2} \iff \frac{2x+1}{2x} - \frac{1}{2} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x+1}{2x} - \frac{x}{2x} \leq 0 \\ &\iff \frac{x+1}{2x} \leq 0. \end{aligned}$$

Or,

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{2x}$	$+$	0	$-$	$+$

Donc,

$$\frac{2x+1}{2x} \leq \frac{1}{2} \iff x \in [-1, 0[.$$

Ainsi, en reprenant le premier calcul de cette question,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{1}{2} \iff x \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup]0, +\infty[\text{ Et } x \in [-1, 0[\\ &\iff x \in \left(]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup]0, +\infty[\right) \cap [-1, 0[\\ &\iff x \in [-1, -\frac{1}{3}] \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $[-1, -\frac{1}{3}]$.

Solution 21 –

1. x est non-nul, donc

$$\begin{aligned} x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0 &\iff x^2 \left(x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0 \\ &\iff x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad u^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

3. 0 n'est pas solution de (E).

Soit $x \neq 0$ et $u = x + \frac{1}{x}$. Alors, d'après la question précédente

$$\begin{aligned} (E) &\iff u^2 + 8u = 0 \\ &\iff u(u+8) = 0 \\ &\iff u = 0 \text{ Ou } u = -8 \end{aligned}$$

On étudie les deux possibilités.

$$\begin{aligned} u = 0 &\iff x = \frac{-1}{x} \\ &\iff x^2 = -1 \end{aligned}$$

$u = 0$ n'a pas de solution en x .

$$\begin{aligned} u = -8 &\iff x + \frac{1}{x} = -8 \\ &\iff x^2 + 8x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 60$ et admet donc deux solutions $\frac{-8 - \sqrt{60}}{2}$ et $\frac{-8 + \sqrt{60}}{2}$, c'est-à-dire $-4 - \sqrt{15}$ et $-4 + \sqrt{15}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\{-4 - \sqrt{15}, -4 + \sqrt{15}\}$.

Solution 22 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E_0) &\iff -x^2 + 2 = 0 \\ &\iff x^2 = 2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_0) est donc $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E_1) &\iff 2x + 3 = 0 \\ &\iff x = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$.

2. On résout ici une équation en m :

$$\begin{aligned} 0 \text{ solution de } (E_m) &\iff (m-1)0^2 + 2m \times 0 + m + 2 = 0 \\ &\iff m = -2 \end{aligned}$$

Ainsi, la seule valeur de m telle que 0 soit solution de (E_m) est -2 . L'équation (E_{-2}) s'écrit $-3x^2 - 4x = 0$, c'est-à-dire $-x(3x+4) = 0$. Elle admet donc une autre solution qui est $-\frac{4}{3}$.

3. (E_m) est une équation du second degré, son nombre de solutions dépend donc du signe de son discriminant Δ_m .

$$\begin{aligned} \Delta_m &= (2m)^2 - 4(m-1)(m+2) \\ &= 4m^2 - 4m^2 + 4m - 8m + 8 \\ &= 8 - 4m \end{aligned}$$

Ainsi, si $m > 2$, l'équation (E_m) n'a pas de solution, si $m = 2$, elle n'en a qu'une et si $m < 2$, elle admet exactement deux solutions distinctes.

Solution 23 –

1. Soient x et y dans $\mathbb{R}$.

$$(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2 = |x| + |y| + 2\sqrt{|x||y|} \geq |x| + |y| \geq |x+y| = (\sqrt{|x+y|})^2.$$

$\sqrt{|x+y|} > 0$ et $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} > 0$ donc, comme $x \mapsto x^2$ est croissante,

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x+y|}.$$

2. On applique cette inégalité à $x+y$ et $-y$. On obtient

$$\sqrt{|x+y|} + \sqrt{|-y|} \geq \sqrt{|x+y-y|}$$

$$\sqrt{|x+y|} \geq \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$$

On montre de même que

$$\sqrt{|x+y|} \geq \sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} = -(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})$$

D'où

$$\sqrt{|x+y|} \geq |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|.$$

Solution 24 – Soient x et y des réels. Alors,

$$\begin{aligned} &g(x) + g(y) - g(x+y) \\ &= \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} - \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \\ &= \frac{1}{(1+|x|)(1+|y|)(1+|x+y|)} \left(|x|(1+|y|)(1+|x+y|) \right. \\ &\quad \left. + |y|(1+|x|)(1+|x+y|) - |x+y|(1+|x|)(1+|y|) \right) \end{aligned}$$

On cherche à déterminer le signe de cette expression. Comme le dénominateur est toujours positif, on va se contenter d'étudier le signe du numérateur, que l'on appelle A . En développant, on obtient

$$\begin{aligned} A &= |x| + |xy| + |x(x+y)| + |xy(x+y)| + |y| + |xy| + |y(x+y)| + |xy(x+y)| \\ &\quad - |x+y| - |x(x+y)| - |y(x+y)| - |xy(x+y)| \\ &= |x| + |xy| + |xy(x+y)| + |y| + |xy| - |x+y| \\ &= (|x| + |y| - |x+y|) + |xy| + |xy(x+y)| + |xy| \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, $|x| + |y| - |x+y| \geq 0$, donc tous les termes de cette dernière ligne sont positifs. On en déduit que $A \geq 0$, et donc que

$$g(x) + g(y) \geq g(x+y).$$

Solution 25 – Soit $x \in [-1, +\infty[$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : « $(1+x)^n \geq 1+xn$ ».

Initialisation : $(1+x)^0 = 1$ et $1+x \times 0 = 1$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on suppose que P_n est vraie. Alors, comme $1+x$ est positif, on peut multiplier l'inégalité par $1+x$:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\geq 1+xn \\ (1+x)^{n+1} &\geq (1+xn)(1+x) \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1+xn+x+x^2n \end{aligned}$$

Comme x^2n est positif, on a

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+xn+x = 1+x(n+1)$$

Donc P_{n+1} est vraie.

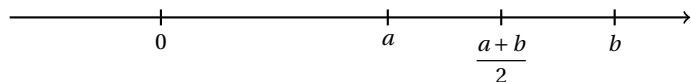
Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+xn$.

On a bien montré que :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+xn$$

Solution 26 –

1.



$\frac{a+b}{2}$ est l'abscisse du milieu du segment dont les extrémités ont pour abscisses a et b .

$|a, b|$ est la distance qui sépare le point d'abscisse a du point d'abscisse b . $\left|\frac{a-b}{2}\right|$ est la moitié de cette distance.

C'est donc la distance entre le point d'abscisse a et le point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.

C'est également la distance entre le point d'abscisse b et le point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.

2. On conjecture :

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \left|\frac{a-b}{2}\right| \quad \text{Et} \quad \min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \left|\frac{a-b}{2}\right|.$$

3. On procède par disjonction de cas.

• Si $a \geq b$: Alors $a - b \geq 0$ donc $\left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{a-b}{2}$. D'où

$$\frac{a+b}{2} + \left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a = \max(a; b),$$

$$\frac{a+b}{2} - \left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b = \min(a; b).$$

• Si $a \leq b$: Alors $a - b \leq 0$ donc $\left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{-a+b}{2}$. D'où

$$\frac{a+b}{2} + \left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{a+b}{2} + \frac{-a+b}{2} = b = \max(a; b),$$

$$\frac{a+b}{2} - \left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{a+b}{2} - \frac{-a+b}{2} = a = \min(a; b),$$

On en déduit que la conjecture est vraie dans tous les cas.

Solution 27 –a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lfloor 3x - 1 \rfloor = 7 &\iff 7 \leq 3x - 1 < 8 \\ &\iff \frac{8}{3} \leq x < 3 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de $a)$ est $[\frac{8}{3}, 3[$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 5 \lfloor -4x + 1 \rfloor^2 = 9 &\iff \sqrt{5} \lfloor -4x + 1 \rfloor = 3 \\ &\iff \lfloor -4x + 1 \rfloor = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{Ou} \quad \lfloor -4x + 1 \rfloor = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Or, $\lfloor -4x + 1 \rfloor$ est entier, donc $b)$ n'a pas de solutions.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par analyse-synthèse :

Analyse : Supposons que $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$.

Alors, $|2x + 3 - (x + 2)| < 1$, c'est à dire $|x + 1| < 1$. Donc $x \in]-2; 0[$.

Synthèse : Nous allons distinguer les cas selon les valeurs possibles de $\lfloor 2x + 3 \rfloor$

- Si $x \in]-2; -\frac{3}{2}[$, alors $2x + 3 \in]-1; 0[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = -1$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 0$, donc x n'est pas solution.
- Si $x \in [-\frac{3}{2}; -1[$, alors $2x + 3 \in [0; 1[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 0$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 0$, donc x est solution.
- Si $x \in [-1; -\frac{1}{2}[$, alors $2x + 3 \in [1; 2[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 1$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 1$, donc x est solution.
- Si $x \in [-\frac{1}{2}; 0[$, alors $2x + 3 \in [2; 3[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 2$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 1$, donc x n'est pas solution.

Finalement, l'ensemble des solutions est $[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}[$.

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!