

EXERCICES — CHAPITRE 29

Exercice 1 (♣) – Déterminer les matrices relativement aux bases canoniques des applications linéaires ci-dessous.

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \varphi_2: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y) &\longmapsto (2x + y; x - 3y) & (x; y; z) &\longmapsto (x + y + z; 2x - y + 3z; -y + z) \\ \varphi_3: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \varphi_4: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y; z) &\longmapsto (x - y; y - z) & (x; y; z) &\longmapsto x - 5y + 4z \\ \varphi_5: \mathbb{C}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{C}_2[X] & \varphi_6: \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto P - XP' & P &\longmapsto (P(-1); P(0); P(1)) \\ \varphi_7: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \varphi_8: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x; y; z) &\longmapsto \begin{pmatrix} x+y & z \\ z-y & x+y-z \end{pmatrix} & M &\longmapsto 2M + M^T \end{aligned}$$

Exercice 2 (♣) – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- On considère l'application f_1 canoniquement associée à A . Calculer $f_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.
- On considère l'endomorphisme f_2 de $\mathbb{R}_2[X]$ dont B est la matrice relativement à b la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $f_2(X^2 + 3X - 4)$.
- On considère l'application f_3 de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 qui a pour matrice B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et à la base $b' = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 où $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Calculer $f_3(3X^2 + 1)$.

Exercice 3 (♥) – On considère les deux applications linéaires

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \longmapsto (2y; -x + 3y) \quad (x; y) \longmapsto (2x - 2y; x - y)$$

- Donner les matrices A et B de f et g relativement à la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 .
- Calculer AB et BA . Que peut-on en déduire sur f et g ?
- Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} . En déduire que f est inversible et expliciter f^{-1} .

- Donner sans démonstration la valeur de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on en déduire sur g ?

Exercice 4 (♥) – Soit l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Donner une base de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$. En déduire une base de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- Montrer que la concaténée b de la base de $\text{Ker}(f)$ et de la base de $\text{Im}(f)$ est une base de \mathbb{R}^3 . En déduire que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- Donner la matrice de f dans la base b . (Sans utiliser de matrices de passage)
- Décrire f comme la composée de deux endomorphismes très simples.

Exercice 5 (♥) – On considère l'endomorphisme u de \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement à la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 est la matrice

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 3 \\ -4 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

On considère la famille $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (2, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 2)$

- Montrer que \mathcal{B}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .
- Donner la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}_1 .
- Sans utiliser de matrice de passage, donner la matrice D de u dans la base \mathcal{B}_1 .
- Donner une relation entre D , A et P .
- Calculer A^n .

Exercice 6 (♠) –

- Soit l'endomorphisme $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x; y) \longmapsto (-5x + 3y; -14x + 8y)$.

Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1; u_2)$ de \mathbb{R}^2 pour laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si une telle base \mathcal{B} existe, que valent $f(u_1)$ et $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2 ?
- Résoudre l'équation $f((x; y)) = (x; y)$. En déduire un candidat pour u_1 .
- En résolvant une autre équation déterminer un candidat pour le vecteur u_2 .
- Conclure.

2. En procédant de même, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1; u_2; u_3)$ de \mathbb{R}^3 telle que la matrice de l'endomorphisme

$$g: \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \longmapsto & (5x + y - 3z; x + 5y - 3z; 2x + 2y - 2z) \end{matrix} \text{ est } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (♥) – Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On pose aussi $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f^2 = 0$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est T

Exercice 8 (♠) – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM - MA$$

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$. On précisera leur dimension et une base de chacun.
3. Justifier que $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la matrice de φ dans une base adaptée à $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.

Exercice 9 (♣) – Dans \mathbb{R}^3 , on considère les familles suivantes :

$$\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)) \quad \mathcal{C} = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7))$$

Vérifier que \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des bases de \mathbb{R}^3 , et déterminer la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

Exercice 10 (♣) – On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 3.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3, 3e_2 - e_3, 2e_1 - e_2)$ est une base de E .
2. Donner la matrice dans les bases \mathcal{B}' vers \mathcal{B} de l'endomorphisme f de E vérifiant :

$$f(e_1 + e_3) = 2e_2, \quad f(3e_2 - e_3) = 7e_1 - e_2 + 6e_3, \quad f(2e_1 - e_2) = 4e_1 + 2e_2 + 6e_3$$

3. En déduire par formule de changement de base la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 11 (♠) – Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dont la matrice relativement à une base \mathcal{B} de E est une matrice scalaire $A = \lambda I_n$.

Montrer que A est la matrice de f dans n'importe quelle base de E .

Exercice 12 (♠) – Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
2. Donner la matrice M de f dans cette base.
3. Que vaut M^n ?

Un tel endomorphisme est dit nilpotent d'indice n . (L'indice est le plus petit k tel que $f^k = 0$)

Exercice 13 (♥) – Déterminer le rang des applications linéaires de l'exo 1 à partir de leur matrice puis en déduire si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

Exercice 14 (♠) – Soit λ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f: \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)^2 P'' + (\lambda X + 1)P' + P \end{matrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 15 (♥) – On note f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$.

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et vérifier, avec celle-ci, que f est un projecteur.
3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 16 (♥) – Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 17 (♥) – Déterminer une base du noyau et de l'image des matrices suivantes :

$$\begin{matrix} 1. & A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & 2. & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & 3. & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \end{matrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!