EXERCICES — CHAPITRE 29

Solution 1 – Les matrices de ces applications dans les bases canoniques sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution 2 –

1. $f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.
2. X^2+3X-4 a pour coordonnées $(-4,3,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
$$\mathcal{M}_b(f_2(X^2+3X-4)) = \mathcal{M}_b(f_2) \times \mathcal{M}_b(X^2+3X-4) = B \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$
Donc $f_2(X^2+3X-4)$ a pour coordonnées $(-10,5,-8)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
$f_2(X^2+3X-4) = -10+5X-8X^2$.
3. $3X^2+1$ a pour coordonnées $(1,0,3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
$$B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
Donc $f_3(3X^2+1)$ a pour coordonnées $(1,2,6)$ dans la base b'.
$$f_3(3X^2+1) = e_1+2e_2+6e_3 = (3,7,8).$$

Solution 3 –

1. $$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
2. $$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
On en déduit que $f \circ g = g \circ f = g$
3. $\det(A) = 2 \neq 0$, donc A est inversible. Son inverse est $\begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit que f est inversible et a pour matrice A^{-1} dans la base canonique. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x - y \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix}.$$
Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y) = (\frac{3}{2}x - y, \frac{1}{2}x)$.
4. En remarquant que $B^2 = B$, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$
On a en particulier que $g^2 = g$, donc g est un projecteur.

Solution 4 –

1. On échelonne A en gardant en mémoire les vecteurs dont on écrit l'image.
$$A \sim_C \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad (f(e_1), f(2e_2+e_1), f(2e_3+e_1))$$
$$\sim_C \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (f(e_1), f(2e_2+e_1), f(2e_1+2e_2+2e_3))$$
Donc $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$. Or, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$, donc $\mathrm{Ker}(A)$ est une droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
On en déduit que $((2,-1,-1),(0,3,-3))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $((2,2,2))$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. On calcule le déterminant de b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\times 6 - 2\times(-12) = 36 \neq 0$$

Donc b est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

3. On sait déjà que $(2,2,2) \in \mathrm{Ker}(f)$. De plus,

$$A \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On obtient donc que

$$M_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. On a que :

$$M_b(f) = 3I_3 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, $f = h \circ p$ où p est la projection sur $\mathrm{Vect}((2,-1,-1),(0,3,-3))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((2,2,2))$ et h est l'homothétie de rapport 3.

Solution 5 –

1.

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Donc $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.

$$A \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = 2e_3$. Donc

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. D'après le cours :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u) = P(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)P(\mathcal{B},\mathcal{B}_1),$$
$$D = P^{-1}AP.$$

5. On a $A = PDP^{-1}$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On commence par calculer P^{-1} :

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On remarque ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Après calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7-2^{n+1} & -1+2^n & -3+3\times 2^n \\ 2-2^{n+1} & 4+2^n & -3+3\times 2^n \\ 4-2^n & -2+2^n & -1+3\times 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Solution 6 –

1. (a) Supposons que cette base existe.

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Alors, $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_1 + 2u_2$.

(b) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -5x+3y & = & x \\ -14x+8y & = & y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -6x+3y & = & 0 \\ -14x+7y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2x.$$

Les solutions de cette équations forment l'ensemble

$$\{(\lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Un candidat pour u_1 est donc $(1,2)$.

(c) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$f(x,y) = (1,2) + 2(x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -5x+3y & = & 1+2x \\ -14x+8y & = & 2+2y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -7x+3y & = & 1 \\ -14x+6y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -7x+3y = 1.$$

Un candidat pour u_2 est donc $(1, \frac{8}{3})$.

(d) u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
On a $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_1 + 2u_2$, donc la matrice de f dans la base (u_1, u_2) est bien A.

2. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^3$,

$$g(x,y,z) = 4(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 3z &= 4x \\ x + 5y - 3z &= 4y \\ 2x + 2y - 2z &= 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z &= 0 \\ x + y - 3z &= 0 \\ 2x + 2y - 6z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 2y - 6z = 0.$$

Deux candidats non-liés sont $w_1 = (3,0,1)$ et $w_2 = (0,3,1)$.
En posant $w_3 = (1,1,2)$, on a $g(w_3) = (0,0,0)$. On note $b = (w_1, w_2, w_3)$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12,$$

donc b est une base de $\mathbb{R}^3$. On vérifie facilement que $g(w_1) = 4w_1$, $g(w_2) = 4w_2$ et $g(w_3) = 0$, donc

$$M_b(g) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 7 –

1. En calculant A^2, on trouve la matrice nulle. Or, A^2 est la matrice de f^2 dans la base canonique, donc f^2 est l'application nulle.

2. On résout $AX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = \iff \begin{array}{rcl} x + y + z &=& 0 \\ -3x - 3y + 3z &=& 0 \\ -2x - 2y + 2z &=& 0 \end{array} \iff x + y - z = 0$$

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{array}{rcl} x &=& -\lambda + \mu \\ y &=& \lambda \\ z &=& \mu \end{array} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (x,y,z) = \lambda(-1,1,0) + \mu(-1,0,1)$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (-1,1,0)$ et $v = (1,0,1)$. Comme les deux vecteurs mentionnés ne sont pas colinéaires, on en déduit que (u, v) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, qui est donc de dimension 2.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est donc de dimension 1. Comme $f(1,0,0) = (1,-3,-2)$, on a que $w = (1,-3,-2)$ est dans l'image. C'est un vecteur non-nul, donc il forme une famille libre, qui est une base de $\mathrm{Im}(f)$ puisque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1. Finalement, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(w)$.

3. On note $e_1 = (1,0,0)$. On sait qu'alors, $f(e_1) = w$, et donc $f(w) = f^2(e_1) = 0$, donc $w \in \mathrm{Ker}(f)$. On complète la famille libre (w) en une base (w, r) de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme e_1 n'est pas dans le noyau de f, il n'est pas une combinaison linéaire de w et r, donc la famille (w, r, e_1) est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et la matrice de f dans cette base est bien T.

Solution 8 –

1. $\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\mathrm{Im}(A)$ est engendré par les colonnes de A. Or les colonnes C_1 et C_2 sont linéairement indépendantes, mais C_3 et C_4 sont des combinaisons linéaires de C_1 et C_2. Donc (C_1, C_2) est une base de $\mathrm{Im}(A)$ et donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right)$
D'après le théorème du rang, on obtient que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 4 - 2 = 2$. Or, on remarque que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de $\mathrm{Ker}(A)$ et donc une base puisque $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

3. Soit $M \in \mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $M = \begin{pmatrix} 2\lambda & -2\mu \\ -2\mu & -2\lambda \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ sont des réels. En identifiant les deux écritures de M, on trouve :

$$\begin{cases} 2\lambda &= \alpha \\ -2\mu &= \beta \\ -2\mu &= -\beta \\ -2\lambda &= \alpha \end{cases}, \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \delta &= 0 \end{cases}$$

Donc M est la matrice nulle et $\mathrm{Im}(\varphi)\cap\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$. Comme on a vu que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))+\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=4=\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, on peut en conclure que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi))$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. On calcule :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\right)=\varphi(-2E_{1,2}-2E_{2,1})=-2\left(\varphi(E_{1,2})+\varphi(E_{2,1})\right)$$

$$=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right)=\varphi(2E_{1,1}-2E_{2,2})=2\left(\varphi(E_{1,1})-\varphi(E_{2,2})\right)$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -8\\ -8 & 0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice de φ dans la base $\left(\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\mathrm{I}_4,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est

$$\begin{pmatrix}0 & 4 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Solution 9 – On pose respectivement B et C les matrices des familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

Alors, on remarque que

$$B\sim_C\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim_C\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 2 & \boxed{-1} & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 2 & \boxed{-1} & 0\\ 1 & 1 & \boxed{-1}\end{pmatrix}$$

Ainsi, B est de rang 3 donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. De même

$$C\sim_C\begin{pmatrix}0 & 0 & \boxed{1}\\ 4 & 8 & -1\\ -17 & -33 & 7\end{pmatrix}\sim_C\begin{pmatrix}0 & 0 & \boxed{1}\\ \boxed{4} & 0 & -1\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \boxed{1}\\ \boxed{4} & 0 & -1\\ 0 & \boxed{1} & 7\end{pmatrix}$$

Donc C est de rang 3 et $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
En notant $\mathcal{A}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire que $B=P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ et $C=P(\mathbb{A},\mathcal{C})$. Donc,

$$B^{-1}C=P(\mathcal{B},\mathcal{A})\times P(\mathbb{A},\mathcal{C})=P(\mathcal{B},\mathcal{C})$$

La matrice recherchée est donc $B^{-1}C$. Le calcul donne

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-18 & 7 & 5\\ 5 & -2 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix},\qquad \text{et}\qquad B^{-1}C=\begin{pmatrix}-27 & -59 & 46\\ 9 & 17 & 0\\ 4 & 10 & -3\end{pmatrix}$$

Solution 10 –

1. On a que

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim_C\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\sim_C\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{-1}\\ 1 & -7 & -2\end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\sim_C\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 0 & \boxed{-1} & 0\\ 1 & -2 & \boxed{-7}\end{pmatrix}$$

Donc la famille $\mathcal{B}'$ est de rang 3, c'est donc une base de E.

2. Il suffit de lire les coefficients donnés par l'énoncé :

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 4\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{pmatrix}$$

3. Il s'agit ici de changer de base d'arrivée, mais pas de base de départ. Ainsi, par la formule de changement de base :

$$M_{\mathcal{B}'}(f)=P(\mathcal{B}',\mathcal{B})^{-1}\times M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$$

$P(\mathcal{B}',\mathcal{B})^{-1}=M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix}$, donc

$$M_{\mathcal{B}'}(f)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & 41 & 44\\ 4 & -1 & 2\\ -2 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

Solution 11 – Soit $\mathcal{B}'$ une base de E. Alors :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}(f) &= (P(\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1} \times M_{\mathcal{B}}(f) \times P(\mathcal{B},\mathcal{B}') \\ &= (P(\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1} \times \lambda \mathrm{I}_n \times P(\mathcal{B},\mathcal{B}') \\ &= \lambda (P(\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1} \times P(\mathcal{B},\mathcal{B}') \\ &= \lambda \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

Solution 12 –

1. Remarquons que pour tout $k \geqslant n$, $f^k = 0$.
   Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que
   $$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0.$$
   En composant par f^{n-1}, on a :
   $$\begin{aligned} f^{n-1}\left(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)\right) &= f^{n-1}(0) \\ \lambda_0 f^{n-1}(x) + \lambda_1 f^n(x) + \cdots + \lambda_0 f^{2n-2}(x) &= 0 \\ \lambda_0 f^{n-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$
   Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$. On recommence en composant cette fois par f^{n-2}, ce qui donne $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$.
   De proche en proche, on en déduit que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, donc $\mathcal{B}$ est libre. De plus, son cardinal est la dimension de E, donc $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$
3. $f^n = 0$, donc $M^n = M_{\mathcal{B}}(f)^n = M_{\mathcal{B}}(f^n) = M_{\mathcal{B}}(0) = 0$.

Solution 13 –

1. $M_1 \sim_C \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_1) = 2$ et φ_1 est bijective.
2. $M_2 \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_2) = 3$ et φ_2 est bijective.
3. $M_3 \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_3) = 2$ et φ_3 est surjective mais pas injective.
4. $M_4 \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_4) = 1$ et φ_4 est surjective mais pas injective.
5. $M_5 \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_5) = 2$ et φ_5 n'est ni injective, ni surjective.
6. $M_6 \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_2) = 3$ et φ_2 est surjective mais pas injective.
7. $M_7 \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_7) = 3$ et φ_7 est injective, mais pas surjective.
8. $M_8 \sim_C \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_8) = 4$ et φ_8 est bijective.

Solution 14 – On écrit la matrice de f dans b la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$f(1) = 1, \quad f(X) = (\lambda+1)X + 1, \quad f(X^2) = (2\lambda+3)X^2 - 2X + 2,$$

$M_b(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda+3 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} f \text{ est un automorphisme} &\Leftrightarrow \det(M_b(f)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda+3 \end{vmatrix} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda+1)(2\lambda+3) \neq 0 \end{aligned}$$

Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{-3}{2}\right\}$.

Solution 15 –

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On effectue les divisions euclidiennes de P_1 et P_2 par $X^2 - X + 1$. On note respectivement Q_1, Q_2 les quotients et R_1, R_2 les restes de ces divisions euclidiennes. On donc $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_1[X]$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\lambda P_1 + P_2 &= \lambda((X^2 - X + 1)Q_1 + R_1) + ((X^2 - X + 1)Q_2 + R_2)\\ &= (X^2 - X + 1)(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)\end{aligned}$$

Par opérations sur les degrés, on a $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leqslant 1$. Ainsi, l'écriture obtenue ci-dessus est la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par $X^2 - X + 1$. Par unicité de cette division, on a bien

$$f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

Donc f est linéaire.

2. On détermine les images des vecteurs de la base canonique par f :

$$f(1) = 1, \qquad f(X) = X, \qquad f(X^2) = X - 1$$

car $X^2 = 1 \times (X^2 - X + 1) + X - 1$ Enfin, on effectue la dernière division euclidienne et on trouve :

$$X^3 = (X+1)(X^2 - X + 1) - 1, \qquad f(X^3) = -1$$

Ainsi, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $f(P)$ est de degré inférieur à 1, donc il est son propre reste lors de la division par $X^2 - X + 1$, c'est-à-dire que $f(f(P)) = f(P)$. On en déduit que $f^2 = f$ et donc que f est un projecteur.

3. On a immédiatement que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_1[X]$. De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $f(P) = P$, donc $P \in \mathrm{Im}(f)$. On en déduit que $\mathbb{R}_1[X] \subset \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

   On en déduit que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1 et le théorème du rang nous indique que $\mathrm{Ker}(f)$ doit être de dimension 2.

   Vu la définition de f, on a bien sûr que $f(X^2 - X + 1) = 0$ et que $f(X(X^2 - X + 1)) = 0$. Comme $X^2 - X + 1$ et $X^3 - X^2 + X$ sont des polynômes non-nuls de degré distincts, ils forment famille libre (et donc une base de par la dimension de l'espace) de $\mathrm{Ker}(f)$.

   Finalement, f est la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(X^2 - X + 1, X^3 - X^2 + X\right)$.

Solution 16 – En faisant le calcul de A^2, on trouve que A^2. On en déduit que $f^2 = f$ et donc que f est une symétrie que $\mathbb{R}_3[X]$. Ses éléments caractéristiques sont donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

On effectue un pivot sur les lignes de $A + \mathrm{I}_4$ (rappelons que les opérations sur les lignes préservent le noyau.

$$A + \mathrm{I}_4 \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim_l \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec cette dernière matrice, il est facile de trouver son noyau, et on trouve

$$\mathrm{Ker}(A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \text{ d'où } \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(-1 - X + X^2,\ 1 + X + X^3\right)$$

On fait de même avec $A - \mathrm{I}_4$:

$$A + \mathrm{I}_4 \sim_L \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Là encore, on peut facilement déterminer le noyau de cette matrice en résolvant un système, et on obtient :

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \text{ d'où } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(1 + X^2,\ -1 + X + X^3\right)$$

On en déduit que f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left(-1 - X + X^2,\ 1 + X + X^3\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(1 + X^2,\ -1 + X + X^3\right)$.

Solution 17 –

1. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & \boxed{1} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 2 & \boxed{1} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ \boxed{-1} & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{7} \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ \boxed{-1} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A) = 3$ et le théorème du rang assure que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

2. On a
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim_L \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
donc $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^4$.

3. On a :
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix},$$
donc $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

4. On a
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a+1 \\ 0 & -a+1 & -a+1 & -a^2+1 \end{pmatrix}$$
   (a) Supposons $a \neq 1$. Alors
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & \boxed{a-1} & -a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a+1 \\ 0 & -a+1 & -a+1 & -a^2+1 \end{pmatrix}$$
$$\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & \boxed{a-1} & -a+1 \\ 0 & \boxed{a-1} & 0 & -a+1 \\ 0 & -a+1 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$
$$\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & \boxed{a-1} & -a+1 \\ 0 & \boxed{a-1} & 0 & -a+1 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-2a+3 \end{pmatrix}$$
      i. Supposons $-a^2-2a+3 \neq 0$ (c'est-à-dire $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$). Alors, on peut choisir le coefficient $-a^2-2a+3$ comme pivot et $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$, $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^4$.
      ii. Si $a = -3$, alors
$$A \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & \boxed{a-1} & -a+1 \\ 0 & \boxed{a-1} & 0 & -a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
      et l'on obtient $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -a-2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et
$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
   (b) Si $a = 1$,
$$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   d'où $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.