

## EXERCICES — CHAPITRE 28

**Exercice 1 (♥)** – Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer une base de leur noyau et de leur image.

1.  $f_1: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$   

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

2.  $f_2: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$   

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + z \\ x - y \\ 2x + z \end{pmatrix}$$

3.  $f_3: \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$   

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

4.  $f_4: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$   

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (3x - y + 2z)$$

5.  $f_5: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f_5((x, y)) = (x + y, x - y, 2x + 2y)$$

6.  $f_6: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$f_6((x, y, z)) = (x + y + z, x + y + z, -2x - 2y - 2z)$$

7.  $f_7: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$f_7((x, y, z)) = (x + 2y + 3z, x + 3y + 5z, x + 4y + 7z)$$

**Exercice 2 (♥)** – Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires? Pour les applications qui sont linéaires, déterminer leur noyau, dire si elles injectives.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z) \quad (x, y) \mapsto xy \quad z \mapsto \operatorname{Re}(z)$$

$$k: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \ell: \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0)) \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$p: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \quad q: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad r: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

$$P \mapsto P^2 \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \quad f \mapsto f + f'$$

**Exercice 3 (♥)** – Pour les applications ci-dessus, montrer qu’elles sont linéaires puis déterminer leur noyau et leur image.

$$\varphi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \varphi_2: E \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$(a, b) \mapsto (a2^n + b(-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad u \mapsto \begin{pmatrix} u_0 & u_2 \\ u_3 & u_1 \end{pmatrix}$$

où  $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$

$$\varphi_3: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a(X^3 + X^2 - 1) + b(X^3 + X + 2) + c(X^2 - X - 3) + d(X^3 - 2)$$

$$\varphi_4: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \quad \text{où } \varphi_4(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \varphi_4(f) \quad x \mapsto \int_0^x f(t) e^t dt$$

$$\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

**Exercice 4 (♥)** – Montrer que  $u: P \mapsto P(0)X^2 + P(1)X$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  et déterminer son noyau. Montrer que son image est  $\operatorname{Vect}(X, X^2)$ .

**Exercice 5 (♥)** – Soit  $\varphi: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

$$f \mapsto f' + \cos \times f$$

Montrer que  $\varphi$  est linéaire, déterminer son noyau et son image. Est-elle injective? Est-elle surjective?

**Exercice 6 (♥)** – Soit  $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  sa base canonique. Soit  $f$  l’application de  $E$  dans  $E$  telle que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = ye_1 + ze_2 + xe_3$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer  $f \circ f \circ f$ . En déduire que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .
3. Soit  $g$  l'application de  $E$  dans  $E$  telles que :

$$\forall u \in E \quad g(u) = f(u) - f \circ f(u)$$

Montrer que  $g \in \mathcal{L}(E)$ .

4. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $g$ .

**Exercice 7 (♥)** – Soit  $E = \mathbb{R}_n[x]$  et  $f$  une application définie sur  $E$  par :

$$f(P(x)) = P(x) + (1 - x)P'(x).$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer  $\text{Im}(f)$  et une base de  $\text{Im}(f)$ .
3. Calculer  $f(Q)(x)$  où  $Q(x) = x - 1$ .
4. (♠) En déduire  $\text{Ker}(f)$  et une base de  $\text{Ker}(f)$ .

**Exercice 8 (♥)** – Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On définit l'application  $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \phi(M) = AM.$$

1. Montrer que  $\phi$  est une application linéaire.
2. Dans cette question, on suppose que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Déterminer une base  $\text{Ker}(\phi)$  et une base de  $\text{Im}(\phi)$ .
  - (b) L'application  $\phi$  est-elle injective? surjective?
3. Dans cette question, on suppose que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Montrer que  $\phi^2$  s'exprime en fonction de  $\phi$  et  $Id$  (l'application identité de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ).
  - (b) En déduire que  $\phi$  est bijective et calculer  $\phi^{-1}$ .

**Exercice 9 (♥)** – Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $g \circ f = 0$  si, et seulement si,  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ .

**Exercice 10 (♠)** – On dit qu'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  est nilpotent lorsqu'il existe un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u^p = 0$ .

1. Si  $E \neq \{0_E\}$ ,  $u$  peut-il être bijectif?

2. Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent. Montrer que pour tout  $x \in E$ , si  $u(x) \neq 0$ , alors  $u(x)$  n'est pas colinéaire à  $x$ .
3. Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  nilpotents qui commutent. Montrer que  $u + v$  est nilpotent.

**Exercice 11 (♣)** – Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Démontrer que :

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g).$$

**Exercice 12 (♠)** – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$  et que  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .
2. Montrer que  $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ .
3. Montrer que  $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$ .
4. En déduire que si  $E$  est un espace de dimension finie et  $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$ , alors  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 13 (♥)** – Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ . On suppose que  $f$  et  $g$  commutent c'est-à-dire que  $f \circ g = g \circ f$ .

Montrer que le noyau et l'image de  $f$  sont stables par  $g$  c'est-à-dire que

$$g(\text{ker}(f)) \subset \text{ker}(f) \quad \text{et} \quad g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f).$$

**Exercice 14 (♥)** – Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes :

$$u_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array} \quad u_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M - {}^t(M) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On rappelle que  ${}^t(M)$  note la somme des éléments de la diagonale de  $M$  et on pourra commencer par montrer que  ${}^t$  est une application linéaire.

$$u_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(7), P(0), P(1)) \end{array} \quad u_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x + y - z, 2x - y, 2x - z) \end{array}$$

**Exercice 15 (♠)** – Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$  des complexes deux à deux distincts. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose

$$P_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

1. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Vérifier que  $P_k \in \mathbb{K}_n[X]$  et calculer  $P_k(x_j)$  pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
2. Montrer que  $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

3. Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  en fonction des nombres  $\tilde{P}(x_k)$ .
4. Montrer que l'application  $T : \begin{matrix} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (\tilde{P}(x_0), \tilde{P}(x_1), \dots, \tilde{P}(x_n)) \end{matrix}$  est un isomorphisme. Déterminer sa réciproque.

**Exercice 16 (♠)** – Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3. Soit  $u$  un endomorphisme non-bijectif de  $E$  tel que  $u^3 + u = 0$ .

1. Montrer que pour tout  $y \in \text{Im}(u)$ , on a  $u^2(y) = -y$ .
2. Montrer que  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = E$ .
3. Soit  $a \in \text{Im}(u)$  tel que  $a \neq 0_E$ . Montrer que  $(a, u(a))$  est libre. Déterminer le  $\text{rg}(u)$ .

**Exercice 17 (♥)** – On se place dans  $\mathbb{R}^3$ . On considère  $P$  le plan d'équation  $x - y + z = 0$  et la droite  $D = \text{Vect}((1, 3, 1))$ .

1. Justifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. On note  $p$  la projection sur  $P$  parallèlement à  $D$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $P$  parallèlement à  $D$ .  
Pour des réels  $x, y, z$  quelconques, donner des expressions de  $p(x, y, z)$  et  $s(x, y, z)$ .

**Exercice 18 (♦)** – On considère l'application suivante

$$\psi : \begin{matrix} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}(P(X) - P(2 - X)) \end{matrix}$$

1. Montrer que  $\psi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Trouver une base du noyau puis de l'image de  $\psi$ . Quel est le rang de  $\psi$ ?
3. Déterminer  $\psi^2$ . Que peut-on dire de l'image et du noyau de  $\psi$ ?

**Exercice 19 (♥)** – Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z) \end{matrix}$ .

L'application  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .  
Montrer que  $f$  est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 20 (♠)** – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$ . Montrer que :

$$p \circ q = p \iff \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p) \quad \text{et} \quad p \circ q = q \iff \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p).$$

**Exercice 21 (♠)** – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $p \circ f = f \circ p$  si, et seulement si,  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Ker}(p)$  sont stables par  $f$ .

**Exercice 22 (♠)** – Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $u, v$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ .
2. Montrer que  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .

3. On suppose que  $E = F$ , que  $u + v$  est inversible et que  $u \circ v = 0$ .
  - (a) Montrer que  $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$ .
  - (b) En déduire que  $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq \dim(E)$ .
  - (c) Montrer que  $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim(E)$ .

**Exercice 23 (♠)** – On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , le sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(\cos, \sin, \exp)$ .

1. Montrer que pour tout  $f \in F$ , on a  $f'' \in F$ .
2. On définit l'application  $\varphi : \begin{matrix} F & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f'' \end{matrix}$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $F$ .
  - (b) Déterminer  $\varphi \circ \varphi$ .
  - (c) Quelle est la nature de  $\varphi$ ? On précisera ses éléments caractéristiques.
  - (d) Donner l'expression des deux projections associées à  $\varphi$ .

**Exercice 24 (♥)** –

Dans  $\mathbb{C}$  considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on pose  $p : \begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} \end{matrix}$ .

1. Montrer que  $p$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}$ .
2. Montrer que  $p$  est un projecteur. Déterminer  $\ker(p)$  et  $\text{Im}(p)$ .

**Exercice 25 (♥)** – Quel est l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tels que  $\tilde{P}(2) = \tilde{P}(1) = 1$ ?

**Exercice 26 (♥)** – Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{C}[X]$  et en déterminer une base.

**Exercice 27 (♠)** – Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  et  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans distincts de  $E$ . Calculer  $\dim(H_1 \cap H_2)$ .

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!