

EXERCICES — CHAPITRE 28

Solution 1 –

1. Commençons par montrer que f_1 est linéaire. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda X + Y) &= f_1\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 \\ \lambda x_1 + y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 - x_2 + x_3) + y_1 - y_2 + y_3 \\ \lambda x_1 + y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

Ainsi l'application f_1 est bien linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_1)$, on a alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors les équations $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ et $x_1 = 0$. Ainsi

$$x_1 = 0 \text{ Et } x_2 = x_3.$$

Ainsi

$$\text{Ker}(f_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x_1 = 0 \text{ Et } x_3 = x_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Le noyau de f_1 est engendré par un unique vecteur non nul, la famille est donc libre et génératrice et une base du noyau est donnée par : $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Déterminons l'image de f_1 . La famille $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\text{Im}(f_1) = \text{Vect}(f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ engendre l'image de f_1 , c'est donc une famille génératrice de l'image. De plus, elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de l'image.

2. Commençons par montrer que f_2 est linéaire. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_2(\lambda X_1 + X_2) &= f_2\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 + \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda x_1 + x_2 - (\lambda y_1 + y_2) \\ 2(\lambda x_1 + x_2) + \lambda z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + z_1) + x_2 + z_2 \\ \lambda(x_1 - y_1) + x_2 - y_2 \\ \lambda(2x_1 + z_1) + 2x_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_2(X_1) + f_2(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi f_2 est bien une application linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_2)$, on a : $f_2(X) = 0$ soit le système :

$$\begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \end{cases}$$

On échelonne le système $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \end{cases}$$

On obtient $z = 0$, $y = 0$ et $x = 0$. Ainsi $\text{Ker}(f_2) = \{0_{3,1}\}$.

Déterminons l'image de f_2 . La famille $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\text{Im}(f_2) = \text{Vect}(f_2(e_1), f_2(e_2), f_2(e_3)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ engendre $\text{Im}(f_2)$, c'est donc une famille génératrice de

$\text{Im}(f_2)$. Il reste à montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

On échelonne puis résout le système et on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille de vecteurs est donc libre, puisqu'elle est génératrice de $\text{Im}(f_2)$, c'est bien une base $\text{Im}(f_2)$.

3. Commençons par montrer que f_3 est linéaire. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in$

$\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_3(\lambda X_1 + X_2) &= f_3\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 \\ 2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) \\ -(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 \\ \lambda(2x_1 - y_1) + 2x_2 - y_2 \\ \lambda(-x_1 + 2y_1) - x_2 + 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_3(X_1) + f_3(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi f_3 est bien une application linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_3)$, on a : $f_3(X) = 0$ soit le système :

$$\begin{cases} x & + & y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 0 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{cases}$$

On échelonne le système $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x & + & y & = & 0 \\ & - & 3y & = & 0 \\ & + & 3y & = & 0 \end{cases}$$

On obtient $y = 0$ et $x = 0$. Ainsi $\text{Ker}(f_3) = \{0_{2,1}\}$.

Déterminons l'image de f_3 . La famille $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\text{Im}(f_3) = \text{Vect}(f_3(e_1), f_3(e_2)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ engendre $\text{Im}(f_3)$, c'est donc une famille génératrice de $\text{Im}(f_3)$.

De plus, elle est composée de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre. C'est donc une base de $\text{Im}(f_3)$.

4. Commençons par montrer que f_4 est linéaire. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in$

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_4(\lambda X_1 + X_2) &= f_2 \left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= (3(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda(3x_1 - y_1 + 2z_1) + 3x_2 - y_2 + 2z_2) \\ &= \lambda f_4(X_1) + f_4(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi f_4 est bien une application linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_4)$, on a : $f_4(X) = 0$ soit :

$$3x - y + 2z = 0$$

i.e.

$$y = 3x + 2z$$

Ainsi

$$\text{Ker}(f_4) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 3x + 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x + 2z \\ z \end{pmatrix} \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\text{Ker}(f_4)$ c'est donc une famille génératrice de $\text{Ker}(f_4)$.

De plus, elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\text{Ker}(f_4)$.

Déterminons l'image de f_4 . La famille $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\text{Im}(f_4) = \text{Vect}(f_4(e_1), f_4(e_2), f_4(e_3)) = \text{Vect}((3), (-1), (2)) = \text{Vect}((1))$$

engendre $\text{Im}(f_4)$, c'est donc une famille génératrice de $\text{Im}(f_4)$. Cette famille est libre car composée d'une unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\text{Im}(f_4)$.

5. Montrons que l'application f_5 est linéaire. Soient $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_5(\lambda X_1 + X_2) &= f_5(\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= f_5((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + (\lambda y_1 + y_2), \lambda x_1 + x_2 - (\lambda y_1 + y_2), 2(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2)) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1) + x_2 + y_2, \lambda(x_1 - y_1) + x_2 - y_2, \lambda(2x_1 + 2y_1) + 2x_2 + 2y_2) \\ &= \lambda f_5((x_1, y_1)) + f_5((x_2, y_2)) \\ &= \lambda f_5(X_1) + f_5(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi l'application f_5 est bien linéaire.

Déterminons le noyau de f_5 . Soit $(x, y) \in \text{Ker}(f_5)$, on a : $f_5((x, y)) = 0$, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

On a $L_3 = 2L_1$ donc le système équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

On échelonne ce système : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

Ainsi $x = y = 0$ et $\text{Ker}(f_5) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Déterminons l'image de f_5 . La base canonique de \mathbb{R}^2 est $(e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$, ainsi :

$$\text{Im}(f_5) = \text{Vect}(f_5(e_1), f_5(e_2)) = \text{Vect}((1, 1, 2), (1 - 1, 2)).$$

La famille $((1, 1, 2), (1 - 1, 2))$ engendre $\text{Im}(f_5)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\text{Im}(f_5)$.

6. Montrons que l'application f_6 est linéaire. Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_6(\lambda X_1 + X_2) &= f_6(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\ &= f_6((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2, -2(\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1 + z_1) + x_2 + y_2 + z_2, \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + x_2 + y_2 + z_2, \lambda(-2x_1 - 2y_1 - 2z_1) - 2x_2 - 2y_2 - 2z_2) \\ &= \lambda f_6(X_1) + f_6(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi l'application f_6 est bien linéaire.

Déterminons le noyau de f_6 . Soit $(x, y, z) \in \text{Ker}(f_6)$, on a : $f_6((x, y, z)) = 0$, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

On a $L_3 = -2L_1$ et $L_2 = L_1$ donc le système équivaut au système suivant :

$$\{ x + y + z = 0$$

On a donc $x = -y - z$ et

$$\text{Ker}(f_6) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} = \{(-y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi

$$\text{Ker}(f_6) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$

La famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ engendre $\text{Ker}(f_6)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\text{Ker}(f_6)$.

Déterminons l'image de f_6 . La base canonique de \mathbb{R}^3 est $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, ainsi :

$$\text{Im}(f_6) = \text{Vect}(f_6(e_1), f_6(e_2), f_6(e_3)) = \text{Vect}((1, 1, -2), (1, 1, -2), (1, 1, -2)) = \text{Vect}((1, 1, -2)).$$

La famille $((1, 1, -2))$ engendre $\text{Im}(f_6)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul donc c'est une base de $\text{Im}(f_6)$.

7. Montrons que l'application f_7 est linéaire. Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_7(\lambda X_1 + X_2) &= f_7(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\ &= f_7((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2), \lambda x_1 + x_2 + 3(\lambda y_1 + y_2) + 5(\lambda z_1 + z_2), \lambda x_1 + x_2 + 4(\lambda y_1 + y_2) + 7(\lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda(x_1 + 2y_1 + 3z_1) + x_2 + 2y_2 + 3z_2, \lambda(x_1 + 3y_1 + 5z_1) + x_2 + 3y_2 + 5z_2, \lambda(x_1 + 4y_1 + 7z_1) + x_2 + 4y_2 + 7z_2) \\ &= \lambda f_7(X_1) + f_7(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi l'application f_7 est bien linéaire.

Déterminons le noyau de f_7 . Soit $(x, y, z) \in \text{Ker}(f_7)$, on a : $f_7((x, y, z)) = 0$, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \\ x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$$

Echelonons ce système, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, le système équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

On remarque que $L_3 = 2L_2$ donc le système équivaut à :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f_7) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z, y = -2z\} = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi

$$\text{Ker}(f_7) = \text{Vect}((1, -2, 1)).$$

La famille $((2, 2, 0))$ engendre $\text{Ker}(f_7)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\text{Ker}(f_7)$.

Déterminons l'image de f_7 . La base canonique de \mathbb{R}^3 est $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, ainsi :

$$\text{Im}(f_7) = \text{Vect}(f_7(e_1), f_7(e_2), f_7(e_3)) = \text{Vect}((1, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 5, 7)).$$

On remarque que $2e_2 - e_1 = e_3$ donc

$$\text{Im}(f_7) = \text{Vect}((1, 1, 1), (2, 3, 4)).$$

La famille $((1, 1, 1), (2, 3, 4))$ est génératrice de $\text{Im}(f_7)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, ainsi c'est une base de $\text{Im}(f_7)$.

Remarque : Si on ne voit pas une combinaison "à l'oeil" des 3 vecteurs $((1, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 5, 7))$, on peut la trouver en cherchant $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x(1, 1, 1) + y(2, 3, 4) + z(3, 5, 7) = (0, 0, 0)$. Cela revient à résoudre le même système que pour la détermination du noyau.

Solution 2

1. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + x' - \lambda y - y', \lambda y + y' - \lambda z - z') \\ &= \lambda(x - y, y - z) + (x' - y', y' - z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\in \ker(f) \\ \text{iff } f(x - y, y - z) &= (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iff } \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) &= \lambda(1, 1, 1) \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &\in \text{Vect}((1, 1, 1)) \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. f n'est pas injective.

- $g(2 \cdot (1, 1)) = g((2, 2)) = 4 \neq 2 = 2 \cdot g((1, 1))$, donc g n'est pas linéaire.
- Ici, on parle forcément de \mathbb{R} -espaces vectoriels, puisque l'espace d'arrivée est uniquement un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} h(\lambda z + z') &= \text{Re}(\lambda z + z') \\ &= \lambda \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \\ &= \lambda z + z' \end{aligned}$$

Donc h est linéaire.

$z \in \ker(h)$
 $\text{iff } \text{Re}(z) = 0$. Donc $\ker(h) = i\mathbb{R}$. h n'est pas injective.

- Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} k(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(0), (\lambda P' + Q')(0), (\lambda P'' + Q'')(0)) \\ &= \lambda (P(0), P'(0), P''(0)) + (Q(0), Q'(0), Q''(0)) \\ &= \lambda k(P) + k(Q) \end{aligned}$$

Donc k est linéaire.

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$.

$P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$

$P \in \ker(k)$

$\text{iff } P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$

$\text{iff } b = c = d = 0$

$\text{iff } P \in \text{Vect}(X^3)$.

Donc $\ker(k) = \text{Vect}(X^3)$. k n'est pas injective.

- Soient u et v des suites réelles convergentes, λ un réel, alors, on sait que $\lambda u + v$ converge vers $\lambda \lim u + \lim v$. Autrement dit,

$$\ell(\lambda u + v) = \lambda \ell(u) + \ell(v).$$

Donc ℓ est linéaire et $\ker(\ell)$ est l'ensemble des suites qui convergent vers 0. ℓ n'est pas injective.

- p n'est pas linéaire. $p(2 \times 1) = 4 \neq 2p(1)$.
- Soient $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, la suite $w = \lambda u + v$ est définie par $w_n = \lambda u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(q(w))_n = w_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda (q(u))_n + (q(v))_n$.

D'où $q(\lambda u + v) = \lambda q(u) + q(v)$. Donc q est linéaire.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors,

$$\begin{aligned} u \in \ker(q) &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow u = (u_0, 0, 0, \dots) \\ &\Leftrightarrow u = u_0(1, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

Donc $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ où a est la suite telle que $a_0 = 1$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. u n'est pas injective.

- Soient f et g des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$r(\lambda f + g) = (\lambda f + g) + (\lambda f + g)' = \lambda(f + f') + (g + g') = \lambda r(f) + r(g)$$

Donc r est linéaire.

$$f \in \ker(r) \Leftrightarrow f + f' = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{-x}$$

Donc $\ker(r) = \text{Vect}(h)$ où $h : t \mapsto e^{-t}$. r n'est pas injective.

Solution 3 –

- Soient $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda(a, b) + \mu(a', b')) &= ((\lambda a + \mu a')2^n + \mu(\lambda b + b')(-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \lambda(a2^n + b(-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(a'2^n + b'(-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \lambda\varphi_1((a, b)) + \mu\varphi_1((a', b')) \end{aligned}$$

Donc φ_1 est linéaire.

Soit $(a, b) \in \ker(\varphi_1)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a2^n + b(-3)^n = 0$. Donc, en particulier pour $n = 0$, on a $a + b = 0$, donc $a = -b$ et pour $n = 1$, on a $2a - 3b = 0$, d'où l'on déduit que $-5b = 0$ et donc $a = b = 0$.

Réciproquement la suite nulle appartient bien à $\ker(\varphi_1)$, donc $\ker(\varphi_1) = \{0\}$.

D'après l'expression de φ_1 , $\Im(\varphi_1) \subset \text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Réciproquement : $(2^n)_{n \in \mathbb{N}} = \varphi_1(1, 0)$ et $((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} = \varphi_1(0, 1)$. Donc $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $\text{Im}(\varphi_1)$. Comme $\text{Im}(\varphi_1)$ est un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire et donc $\text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \text{Im}(\varphi_1)$

Par double inclusion $\text{Im}(\varphi_1) = \text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

2. Soient $u, v \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda u + v) &= \begin{pmatrix} \lambda u_0 + \mu v_0 & \lambda u_2 + \mu v_2 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 & \lambda u_1 + \mu v_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} u_0 & u_2 \\ u_3 & u_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_0 & v_2 \\ v_3 & v_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \varphi_2(u) + \mu \varphi_2(v) \end{aligned}$$

Donc φ_2 est linéaire.

$u \in \ker(\varphi_2)$

$\text{iff } u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$ Or, les éléments de E étant des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, une suite de E dont les deux premiers termes sont nulle est la suite nulle.

Donc $\ker(\varphi_2) = \{0\}$.

Soit $A \in \text{Im}(\varphi_2)$. Alors, il existe $u \in E$ tel que $A = \varphi_2(u)$. Alors,

$$A = \begin{pmatrix} u_0 & 2u_1 + 3u_0 \\ 7u_1 + 6u_0 & u_1 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Im}(\varphi_2) \subset \text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$. Réciproquement, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ sont les images des suites de E respectivement définies par $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ et par $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$. Comme $\text{Im}(\varphi_2)$ est un espace vectoriel et est donc stable par combinaison linéaire, on a $\text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \subset \text{Im}(\varphi_2)$ et donc $\text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \text{Im}(\varphi_2)$.

3. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi_3(\lambda M + \mu M') &= (\lambda a + \mu a')(X^3 + X^2 - 1) + (\lambda b + \mu b')(X^3 + X + 2) \\ &\quad + (\lambda c + \mu c')(X^2 - X - 3) + (\lambda d + \mu d')(X^3 - 2) \\ &= \lambda [a(X^3 + X^2 - 1) + b(X^3 + X + 2) + c(X^2 - X - 3) + d(X^3 - 2)] \\ &\quad + \mu [a'(X^3 + X^2 - 1) + b'(X^3 + X + 2) + c'(X^2 - X - 3) + d'(X^3 - 2)] \\ &= \lambda \varphi_3(M) + \mu \varphi_3(M') \end{aligned}$$

Donc φ_3 est linéaire.

$$\begin{aligned} M &\in \ker(\varphi_3) \\ \text{iff } \varphi_3(M) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{iff } (a + b + d)X^3 + (a + c)X^2 + (b - c)X + (-a + 2b - 3c - 2d) = 0$$

$$\text{iff } \begin{cases} a + b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -a + 2b - 3c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$\text{iff } \begin{cases} d = 0 \\ a = -c \\ b = c \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{iff } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} d = 0 \\ a = -\lambda \\ b = \lambda \\ c = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Donc } \ker(\varphi_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Donc $\dim(\ker(\varphi_3)) = 1$ (Espace engendré par un unique vecteur non-nul). D'après le théorème du rang, on en déduit que

$$\dim(\text{Im}(\varphi_3)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(\varphi_3)) = 4 - 1 = 3.$$

Soit B la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Alors, $\text{Im}(\varphi_3)$ est engendré par les images des vecteurs de cette base. En calculant ces images, on obtient que :

$$\text{Im}(\varphi_3) = \text{Vect}((X^3 + X^2 - 1, X^3 + X + 2, X^2 - X - 3, X^3 - 2)).$$

Cette famille de 4 vecteurs engendre un espace de dimension 3. On va donc en extraire une famille libre à 3 vecteurs. Pour cela, on remarque que $X^2 - X - 3 = X^3 + X^2 - 1 - (X^3 + X + 2)$. Ainsi, $X^2 - X - 3$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, et l'on peut le retirer en gardant le même espace engendré.

On en déduit que $(X^3 + X^2 - 1, X^3 + X + 2, X^3 - 2)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi_3)$. Comme cet espace est de dimension 3, $(X^3 + X^2 - 1, X^3 + X + 2, X^3 - 2)$ est une base de $\text{Im}(\varphi_3)$.

4. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors en utilisant la linéarité de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_4(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^t dt \\ &= \lambda \int_0^x f(t) e^t dt + \mu \int_0^x g(t) e^t dt \\ &= \lambda \varphi_4(f)(x) + \mu \varphi_4(g)(x) \end{aligned}$$

Donc $\varphi_4(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi_4(f) + \mu \varphi_4(g)$ et φ_4 est linéaire.

Soit $f \in \ker(\varphi_4)$. Alors, $\varphi_4(f)$ est la fonction nulle sur \mathbb{R} . Donc sa dérivée est aussi la fonction nulle. Or $\varphi_4(f)$ est une primitive de $t \mapsto f(t) e^t$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) e^t = 0$, d'où l'on déduit que $f(t) = 0$.

Donc f est la fonction nulle et $\ker(\varphi_4) = \{0\}$.

on va montrer que $\text{Im}(\varphi_4) = K = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.

Soit $g \in K$. Alors g est dérivable. On pose $h : t \mapsto g'(t) e^{-t}$. h est continue.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_4(h)(x) = \int_0^x g'(t) e^{-t} e^t dt = \int_0^x g'(t) dt = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) = g(x).$$

Donc $\varphi_4(h) = g$ et $g \in \text{Im}(\varphi_4)$. Donc $K \subset \text{Im}(\varphi_4)$.

Soit $g \in \text{Im}(\varphi_4)$. Alors il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tel que $g = \varphi_4(f)$.

g est la primitive d'une fonction continue, donc est de classe \mathcal{C}^1 . De plus, c'est la primitive qui s'annule en 0, donc $g \in K$. Donc $\text{Im}(\varphi_4) \subset K$.

Par double inclusion, $\text{Im}(\varphi_4) = K$.

Solution 4 – Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(0)X^2 + (\lambda P + \mu Q)(1)X \\ &= \lambda P(0)X^2 + \mu Q(0)X^2 + \lambda P(1)X + \mu Q(1)X \\ &= \lambda(P(0)X^2 + P(1)X) + \mu(Q(0)X^2 + Q(1)X) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire. Comme ses espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes, il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

$$P \in \ker(u) \iff P(0)X^2 + P(1)X \iff P(0) = 0 \iff P(X) = X(X-1) \mid P.$$

Donc $\ker(u) = \{X(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $u(P)$ est une combinaison linéaire de X et X^2 , donc

$\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(X, X^2)$.

Réciproquement, $X = u(X)$ et $X^2 = u(1-X)$, donc X et X^2 sont dans $\text{Im}(u)$. Comme $\text{Im}(u)$ est stable par combinaison linéaire, $\text{Vect}(X, X^2) \subset \text{Im}(u)$ et par double inclusion, $\text{Vect}(X, X^2) = \text{Im}(u)$.

Solution 5 – Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)' + \cos \times (\lambda f + \mu g) \\ &= \lambda f' + \mu g' + \lambda \cos \times f + \mu \cos \times g \\ &= \lambda(f' + \cos \times f) + \mu(g' + \cos \times g) \\ &= \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

$f \in \ker(\varphi)$

$iff f' + \cos \times f = 0$. Donc le noyau de φ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \cos \times y = 0$. Donc

$$\ker(\varphi) = \text{Vect}(h), \quad \text{avec } h : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-\sin(t)} \end{matrix}.$$

$\ker(\varphi)$ n'est pas $\{0\}$, donc φ n'est pas injective.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

$f \in \text{Im}(\varphi) \iff \exists g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), g' + \cos \times g = f$.

On a vu dans le cours sur les équations différentielles que l'équation $y' + \cos y = f$ avec f continue possède des solutions, donc il existe g dérivable sur \mathbb{R} telle que $g' + \cos \times g = f$. On a alors $g' = f - \cos \times g$, donc g' est continue et g est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, d'où $\varphi(g) = f$.

Donc $f \in \text{Im}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Donc φ est surjective.

Solution 6 –

1. La base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vaut $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ainsi :

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \text{ Et } ye_1 + ze_2 + xe_3 = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Ainsi l'expression de f est donnée pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par :

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant que f est linéaire.

Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda X_1 + X_2) &= f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(X_1) + f(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi f est bien linéaire.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$f \circ f \circ f(X) = f \circ f \left(\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ainsi $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$. L'application f est donc bijective et $f^{-1} = f \circ f$.

3. Commençons par remarquer que $f \circ f$ est linéaire car c'est la composée de deux applications linéaires. Montrons maintenant la linéarité de g . Soient $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) - f \circ f(\lambda u + v) \\ &= \lambda f(u) + f(v) - \lambda f \circ f(u) - f \circ f(v) \quad \text{par linéarité de } f \text{ et de } f \circ f \\ &= \lambda(f(u) - f \circ f(u)) + f(v) - f \circ f(v) \\ &= \lambda g(u) + g(v). \end{aligned}$$

Ainsi $g \in \mathcal{L}(E)$.

4. Déterminons le noyau de g . Soit $u \in \text{Ker}(g)$ alors $g(u) = 0$ soit

$$f(u) = f \circ f(u)$$

composons cette égalité par f , on obtient :

$$f \circ f(u) = u.$$

Posons alors $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, résolvons le système $f \circ f(u) = u$:

$$\begin{cases} z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x & & z = 0 \\ x & - & y = 0 \\ y & & y - z = 0 \end{cases}$$

Echelonsons-le, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on a :

$$\begin{cases} -x & & z = 0 \\ & - & y + z = 0 \\ & & y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x & & z = 0 \\ & - & y + z = 0 \end{cases}$$

Ainsi $y = z$ et $x = z$ avec $z \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\text{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\text{Ker}(g)$ et elle est constituée d'un unique vecteur non nul,

elle est donc génératrice et libre, c'est une base de $\text{Ker}(g)$.

Déterminons l'image de g . On a :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3)).$$

Or

$$g(e_1) = f(e_1) - f \circ f(e_1) = e_3 - f(e_3) = e_3 - e_2$$

et

$$g(e_2) = f(e_2) - f \circ f(e_2) = e_1 - f(e_1) = e_1 - e_3$$

et

$$g(e_3) = f(e_3) - f \circ f(e_3) = e_2 - f(e_2) = e_2 - e_1$$

On remarque que $g(e_1) + g(e_2) = e_1 - e_2 = -g(e_3)$, ainsi :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(e_3 - e_2, e_1 - e_3) \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\text{Im}(g)$ et est composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une base de $\text{Im}(g)$

Solution 7 –

1. Soit $P \in E$ alors $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n - 1$. Or $\deg(x - 1) = 1$ donc d'après les propriétés sur les degrés, $\deg((x - 1)P') \leq n$. De nouveau d'après les propriétés sur les degrés,

$$\deg(P + (x - 1)P') \leq \max(\deg(P), \deg((x - 1)P')) \leq n.$$

Ainsi $f(P) \in E$ et on a bien $f : E \rightarrow E$.

Montrons que f est une application linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(x) + (1 - x)(\lambda P + Q)'(x) \\ &= \lambda P(x) + Q(x) + (1 - x)(\lambda P' + Q')(x) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(P(x) + (1 - x)P'(x)) + Q(x) + (1 - x)Q'(x) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi f est bien une application linéaire et comme $f : E \rightarrow E$, $f \in \mathcal{L}(E)$.

2. La famille $(1, x, \dots, x^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(x), \dots, f(x^n)).$$

Or $f(1) = 1$ et pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(x^p) = x^p + (1 - x)px^{p-1} = (1 - p)x^p + px^{p-1}$. On a donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, 1, -x^2 + 2x, \dots, (1 - n)x^n + nx^{n-1}) = \text{Vect}(1, -x^2 + 2x, \dots, (1 - n)x^n + nx^{n-1}).$$

La famille $(1, -x^2 + 2x, \dots, (1 - n)x^n + nx^{n-1})$ engendre $\text{Im}(f)$, elle est donc génératrice de $\text{Im}(f)$. De plus, elle est non nulle et échelonnée en degré, elle est donc libre et c'est une base de $\text{Im}(f)$.

3. On calcule et on obtient $f(Q)(x) = 0$.

4. D'après le calcul précédent, on peut affirmer que $Q \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Vect}(Q) \subset \text{Ker}(f)$ car $\text{Ker}(f)$ est un espace vectoriel. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $P \in \text{Ker}(f)$ alors $f(P) = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P différente de 1, on a alors $P(\alpha) = 0$ et l'égalité $f(P) = 0$ évaluée en α nous donne : $(1 - \alpha)P'(\alpha) = 0$. Comme $\alpha \neq 1$, on en déduit que $P'(\alpha) = 0$.

Dérivons ensuite l'égalité, $f(P) = 0$, on obtient :

$$P'(x) + (1 - x)P''(x) - P'(x) = 0$$

évaluons-la en α , on obtient :

$$(1 - \alpha)P''(\alpha) = 0$$

Comme $\alpha \neq 1$, on en déduit que $P''(\alpha) = 0$.

On conjecture donc que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P^{(p)}(\alpha) = 0$. On montre ce résultat par récurrence (qu'il faudrait rédiger en utilisant la formule de Leibniz pour l'hérédité).

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P^{(p)}(\alpha) = 0$, P est forcément le polynôme nul.

Ainsi si P possède une racine différente de 1, c'est le polynôme nul.

Supposons donc que $P \neq 0$, sa seule racine est donc 1, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$P(x) = C(x - 1)^p.$$

On va montrer que $p = 1$. Comme $P \in \text{Ker}(f)$, on a $f(P) = 0$ et donc pour tout réel x

$$C(x - 1)^p + C(1 - x)p(x - 1)^{p-1} = 0$$

soit en factorisant par $C(x - 1)^p$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C(x - 1)^p(1 - p) = 0$$

Comme $C(x - 1)^p \neq 0$, on en déduit que $1 - p = 0$ soit $p = 1$. Ainsi $P = C(x - 1) \in \text{Vect}(Q)$.

En conclusion, soit $P = 0$ soit il existe $C \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(x) = C(x - 1)$. Ainsi dans les deux cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = \lambda(x - 1) \in \text{Vect}(Q)$.

Conclusion, $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(Q)$.

Solution 8 –

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda M_1 + M_2) &= A(\lambda M_1 + M_2) \\ &= \lambda A M_1 + A M_2 \\ &= \lambda \phi(M_1) + \phi(M_2) \end{aligned}$$

Ainsi ϕ est bien une application linéaire.

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\phi(M) = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix}.$$

Soit $M \in \text{Ker}(\phi)$, alors $\phi(M) = 0_2$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 2b + 4d = 0 \end{cases}$$

On remarque que $L_2 = 2L_1$ et $L_4 = 2L_3$, il équivaut donc au système suivant :

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

On a donc :

$$\text{Ker}(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = -2c \text{ Et } b = -2d \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On a donc :

$$\text{Ker}(\phi) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\text{Ker}(\phi)$, elle est donc génératrice de $\text{Ker}(\phi)$. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de $\text{Ker}(\phi)$.

Soit $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\phi(E_{1,1}), \phi(E_{1,2}), \phi(E_{2,1}), \phi(E_{2,2})) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\text{Im}(\phi)$, elle est donc génératrice de $\text{Im}(\phi)$. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de $\text{Im}(\phi)$.

(b) Le noyau de ϕ n'est pas réduit au vecteur nul donc l'application ϕ n'est pas injective.

L'application n'est pas non plus surjective car I_2 n'a pas d'antécédent par ϕ . En effet, la matrice A n'est pas inversible puisque $1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$ donc il n'existe pas de matrice M tel que $AM = I_2$, autrement dit I_2 ne possède pas d'antécédent par ϕ .

3. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\phi^2(M) = \phi(\phi(M)) = \phi(AM) = A^2M$. Or $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 2A + 3I_2$, on a donc :

$$\phi^2(M) = (2A + 3I_2)M = 2AM + 3M = 2\phi(M) + 3\text{Id}(M).$$

Ainsi $\phi^2 = 2\phi + 3\text{Id}$.

(b) Partons de la relation $\phi^2 = 2\phi + 3\text{Id}$, on a :

$$\phi^2 = 2\phi + 3\text{Id} \iff \phi^2 - 2\phi = 3\text{Id} \iff \phi \circ (\phi - 2\text{Id}) = 3\text{Id}$$

or comme ϕ est linéaire, on a :

$$\phi \circ (\phi - 2\text{Id}) = 3\text{Id} \iff \phi \circ \frac{1}{3}(\phi - 2\text{Id}) = \text{Id}$$

L'application ϕ est bien bijective et $\phi^{-1} = \frac{1}{3}(\phi - 2\text{Id})$.

Solution 9 – Si $g \circ f = 0$: Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. $g(y) = g(f(x)) = 0(x) = 0$, donc $y \in \text{ker}(g)$. D'où $\text{Im}(f) \subset \text{ker}(g)$.

Réciproquement, si $\text{Im}(f) \subset \text{ker}(g)$. Soit $x \in E$. Alors, $f(x) \in \text{Im}(f)$. Donc $f(x) \in \text{ker}(g)$, ce qui signifie que $g(f(x)) = 0$. Donc $g \circ f = 0$ pour tout $x \in E$ et $g \circ f$ est l'application nulle.

D'où l'équivalence par double implication.

Solution 10 –

1. Si u est bijectif, alors on peut $p - 1$ fois par sa réciproque et on obtient, $u^p \circ (u^{-1}) = 0 \circ (u^{-1})$, donc

$$u = 0$$

Or, si E n'est pas l'espace vectoriel trivial, l'application nulle n'est pas bijective. Absurde, donc u n'est pas bijectif.

2. On note $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$. On a forcément $x \neq 0$. Supposons que x est colinéaire à $u(x)$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n(x) = \lambda^n x$. Or, pour $n = p$, on a $u^p = 0$, donc $\lambda^p x = 0$. Comme x est non-nul, $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$. On en déduit que $u(x) = 0$, ce qui est absurde. Donc x n'est pas colinéaire à $u(x)$.

3. On note $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $u^p = v^q = 0$. Comme u et v commutent, alors par la formule du binôme de Newton, on a :

$$(u + v)^q = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$$

Pour $k \in \llbracket p, p+q \rrbracket$, alors $u^p = 0$, donc $\binom{n}{k} u^k v^{n-k} = 0$.

Pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $n - k \geq q$, donc $v^{n-k} = 0$ et donc $\binom{n}{k} u^k v^{n-k} = 0$. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et

$$(u + v)^{p+q} = 0$$

Ainsi, $u + v$ est nilpotent.

Solution 11 – Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0$. $g(0) = 0$, donc $g(f(x)) = 0$. D'où $x \in \ker(g \circ f)$ et $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.

Soit $z \in \text{Im}(g \circ f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. en posant $y = f(x)$, on a $z = g(y)$. Donc $z \in \text{Im}(g)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Solution 12 –

1. Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = f(0) = 0$ et $x \in \ker(f^2)$. D'où $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

Soit $z \in \text{Im}(f^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $f \circ f(x) = z$. En posant $y = f(x)$, on a donc $z = f(y)$. Donc $z \in \text{Im}(f)$ et on en déduit que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2. \triangleright Supposons que $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

Soit $x \in \ker(f^2)$. Alors $f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \ker(f)$. Or on a aussi $f(x) \in \text{Im}(f)$. Donc $f(x) \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$ ce qui implique que $f(x) = 0$ et donc que $x \in \ker(f)$. D'où

\triangleright Réciproquement, si $\ker(f^2) \subset \ker(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. De plus, $y \in \ker(f)$ donc $f(y) = 0$, c'est-à-dire $f(f(x)) = 0$ et $x \in \ker(f^2)$. Comme $\ker(f^2) \subset \ker(f)$, $f(x) = 0$, c'est-à-dire $y = 0$ (Réciproquement, $\text{Im}(f) \cap \ker(f)$ contient bien 0 en tant que sous-espace vectoriel de E).

On a donc bien $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

3. \triangleright Supposons que $E = \ker(f) + \text{Im}(f)$. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soient $x_K \in \ker(f)$ et $x_I \in \text{Im}(f)$ tels que $x = x_K + x_I$.

Par linéarité, $f(x) = f(x_K) + f(x_I) = f(x_I)$ car $x_K \in \ker(f)$. $x_I \in \text{Im}(f)$, donc il existe $w \in E$ tel que $f(w) = x_I$. On obtient alors $f(f(w)) = y$ et donc $y \in \text{Im}(f^2)$. D'où $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

\triangleright Réciproquement, si $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$:

Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \text{Im}(f)$, donc $f(x) \in \text{Im}(f^2)$. On note $z \in E$ tel que $f(f(z)) = f(x)$.

On remarque par linéarité que $f(x - f(z)) = 0$. Donc $x - f(z) \in \ker(f)$.

On écrit $x = f(z) + x - f(z)$. Comme $f(z) \in \text{Im}(f)$ et $x - f(z) \in \ker(f)$, on a bien que $x \in \text{Im}(f) + \ker(f)$.

Donc $E \subset \text{Im}(f) + \ker(f)$. L'inclusion réciproque est forcément vraie car $\text{Im}(f) + \ker(f)$ est une somme de sous-espaces vectoriels de E .

Donc $E = \text{Im}(f) + \ker(f)$.

4. Si E est de dimension finie et $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$. On a que $\dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Im}(f))$. D'après la question 1, on a l'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$. Par inclusion + égalité des dimensions, on a donc $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

D'après la question 3, que on en déduit que $E = \text{Im}(f) + \ker(f)$

Comme E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à f et f^2 . On obtient alors que

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f))$$

$$\dim(\ker(f^2)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f))$$

Comme on a l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ d'après la question 1, on en déduit que $\ker(f) = \ker(f^2)$. Ainsi, d'après la question 2, $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Comme $E = \text{Im}(f) + \ker(f)$ et $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont bien supplémentaires dans E .

Solution 13 – • Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0$. Donc $g(f(x)) = g(0) = 0$. Comme f et g commutent, on en déduit que $f(g(x)) = 0$. Donc $g(x) \in \ker(f)$.

D'où $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$.

• Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $g(y) = g(f(x)) = f(g(x))$. Donc $g(y) \in \text{Im}(f)$. On en déduit que $g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.

Solution 14 –

1. On a vu dans le cours que u_1 est linéaire. Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$,

$$u_1(M) = 0 \iff M^T = 0 \iff M = 0$$

Donc $\ker(u_1) = \{0\}$, donc u_1 est injective. Comme u_1 est un automorphisme d'un espace de dimension finie, u_1 est bijective. C'est un isomorphisme.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, en notant $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$u_2(\lambda A + B) = C(\lambda A + B) - {}^t(\lambda A + B)C = \lambda CA + CB - \lambda {}^t(A)C - {}^t(B)C$$

car la trace est linéaire. Donc,

$$u_2(\lambda A + B) = \lambda(CA - {}^t(A)C) + CB - {}^t(B)C = \lambda u_2(A) + u_2(B)$$

u_2 est donc linéaire. Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$u_2(M) = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 2a+2d \\ 2a+2d & a+d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+2c = a+d \\ b+2d = 2a+2d \\ 2a+c = 2a+2d \\ 2b+d = a+d \end{cases} \iff \begin{cases} 2c = d \\ b = 2a \\ c = 2d \\ 2b = a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\ker(u_2) = \{0\}$, donc u_2 est injective. Comme c'est une application injective entre deux espaces de même dimension finie, elle est bijective. C'est un isomorphisme.

3. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u_3(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(7), (\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)(1)) \\ &= \lambda (P(7), P(0), P(1)) + (Q(7), Q(0), Q(1)) \\ &= \lambda u_3(P) + u_3(Q) \end{aligned}$$

Ainsi u_3 est linéaire.

Soit $P \in \ker(u_3)$. Alors P est polynôme de degré inférieur ou égal à 2 admettant au moins trois racines distinctes, donc P est le polynôme nul. Donc $\ker(u_3) = \{0\}$, donc u_3 est injective. Comme c'est une application injective entre deux espaces de même dimension finie, elle est bijective. C'est un isomorphisme.

4. u_4 est clairement linéaire.

$$u_4(1, 0, 0) = (3, 2, 2), \quad u_4(0, 1, 0) = (1, -1, 0), \quad u_4(0, 0, 1) = (-1, 0, -1)$$

Donc $\text{Im}(u_4) = \text{Vect}((3, 2, 2), (1, -1, 0), (-1, 0, -1))$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a(3, 2, 2) + b(1, -1, 0) + c(-1, 0, -1) = 0$. On a donc

$$\begin{cases} 3a + b - c = 0 \\ 2a - b = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $((3, 2, 2), (1, -1, 0), (-1, 0, -1))$ est libre, donc elle est de rang 3. Comme c'est une famille de \mathbb{R}^3 , on en déduit que $\text{Im}(u_4) = \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que u_4 est surjective. Comme c'est une application surjective entre deux espaces de même dimension finie, elle est bijective. C'est un isomorphisme.

Solution 15 –

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est un produit de n polynômes de degré 1, donc P_k est de degré n . Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

- Si $j = k$, alors, $P_k(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} = 1$

- Si $j \neq k$, alors, l'un des termes du produit $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$ est nul, donc $P_k(x_j) = 0$.

2. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en évaluant en x_k , d'après la question précédente on obtient $\lambda_k = 0$. Ainsi, (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille libre. Comme c'est une famille de cardinal $n + 1$ dans un espace de dimension $n + 1$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3. Comme c'est une base, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

En évaluant en x_k , on obtient d'après la question 1 que

$$P(x_k) = \lambda_k$$

Donc les coordonnées de P dans la base (P_0, P_1, \dots, P_n) sont $(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$.

4. En utilisant les questions précédentes, pour tout $k \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a

$$T(P_k) = (P_k(x_0), P_k(x_1), \dots, P_k(x_n)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

où le 1 est en position k .

Ainsi, l'image par T de la base (P_0, P_1, \dots, P_n) est la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} , donc T est un isomorphisme.

Sa réciproque est l'application linéaire qui envoie la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} sur la base (P_0, P_1, \dots, P_n) . D'après la détermination d'un endomorphisme par l'image d'une base, on a que pour tout $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$T^{-1}((x_0, x_1, \dots, x_n)) = \sum_{k=0}^n x_k P_k$$

Solution 16 –

1. Pour tout $y \in \text{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or, on sait que $u^3 + u = 0$, c'est-à-dire que $(u^2 + \text{Id}_E) \circ u = 0$. En appliquant cela à x , on en déduit que

$$(u^2 + \text{Id}_E)(u(x)) = 0$$

$$(u^2 + \text{Id}_E)(y) = 0$$

$$u^2(y) + y = 0$$

$$u^2(y) = -y$$

2. Comme on est en dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang, qui donne que $\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E)$.

Soit $u \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors, $u(y) = 0$, et donc $u^2(y) = u(0) = 0$. Or, d'après la première question, $y = -u^2(y) = 0$, donc $y = 0$.

On en déduit que $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, donc par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E .

3. Soit $a \in \text{Im}(u)$, non-nul. Il existe $b \in E$ tel que $u(b) = a$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda a + \mu u(a) = 0$. Alors, en composant par u , on obtient que

$$u(\lambda a + \mu u(a)) = u(0) = 0$$

Par linéarité,

$$\lambda u(a) + \mu u^2(a) = 0$$

En utilisant la question précédente,

$$\lambda u(a) - \mu a = 0$$

On a donc un système $\begin{cases} \lambda u(a) - \mu a = 0 \\ \lambda a + \mu u(a) = 0 \end{cases}$, on en déduit $(\lambda^2 + \mu^2)u(a) = 0$.

D'après la question 2, $a \notin \ker(u)$ (car $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ et a n'est pas nul), donc $u(a) \neq 0$. On en déduit que $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Comme λ et μ sont réels, on obtient $\lambda = \mu = 0$. Donc $(a, u(a))$ est libre, c'est-à-dire que $(u(b), u(a))$ est libre. Comme c'est une famille de $\text{Im}(u)$, on en déduit que $\text{rg}(u) \geq 2$.

Enfin, u n'est pas bijectif, donc son rang n'est pas 3. On en déduit que $\text{rg}(u) = 2$.

Solution 17 –

1. P est de dimension 2 et D de dimension 1. Soit $v \in P \cap D$. Alors $v = (\lambda, 3\lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus $v \in P$ donc $\lambda - 3\lambda + \lambda = 0$, d'où $\lambda = 0$ et $v = 0$.

En en déduit que $P \cap D = \{0\}$ et que P et D sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

2. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche à écrire

$$(x, y, z) = \lambda(1, 3, 1) + (a, b, c)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in P$.

On doit donc avoir $\begin{cases} x = \lambda + a \\ y = 3\lambda + b \\ z = \lambda + c \\ a - b + c = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x - \lambda = a \\ y - 3\lambda = b \\ z - \lambda = c \\ x - \lambda - y + 3\lambda + z - \lambda = 0 \end{cases}$,

$$\text{donc } \begin{cases} a = 2x + z - y \\ b = 3x + 3z - 2y \\ c = 2z + x - y \\ \lambda = y - x - z \end{cases}$$

On a donc obtenu l'écriture de (x, y, z) dans les supplémentaires P et D . On en déduit alors facilement que

$$p(x, y, z) = (a, b, c) = (2x + z - y, 3x + 3z - 2y, 2z + x - y)$$

$$s(x, y, z) = (a, b, c) - \lambda(1, 3, 1) = (3x + 2z - 2y, 6x + 6z - 5y, 3z + 2x - 2y)$$

Solution 18 –

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}((\lambda P + \mu Q)(X) - (\lambda P + \mu Q)(2 - X)) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{2}P(X) - P(2 - X) \right) + \left(\frac{1}{2}\mu Q(X) - \mu Q(2 - X) \right) \\ &= \lambda \psi(P) + \mu \psi(Q) \end{aligned}$$

ψ est donc linéaire.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a; b; c; d \in \mathbb{R}$.

$$P \in \ker(\psi)$$

$$\text{iff } \frac{1}{2}(P(X) - P(2 - X)) = 0$$

$$\text{iff } P(X) = P(2 - X)$$

$$\text{iff } aX^3 + bX^2 + cX + d = a(2 - X)^3 + b(2 - X)^2 + c(2 - X) + d$$

$$\text{iff } aX^3 + bX^2 + cX + d = -aX^3 + (6a + b)X^2 + (-12a - 4b - c)X$$

$$\text{iff } \begin{cases} -a = a \\ 6a + b = b \\ -12a - 4b - c = c \\ 8a + 4b - 2c + d = d \end{cases}$$

$$\text{iff } \begin{cases} a = 0 \\ c = -2b \end{cases}$$

$$\text{iff } P = c(-2X + X^2) + d$$

Donc $\ker(\psi) = \text{Vect}(1, -2X + X^2)$. Une base en est donc $(1, -2X + X^2)$.

D'après le théorème du rang, on a

$$\text{rg}(\psi) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\ker(\psi)) = 4 - 2 = 2.$$

$\psi(X) = X - 1$ et $\psi(X^3) = X^3 - 3X^2 + 6X - 4$. Donc

$$\text{Vect}(X - 1, X^3 - 3X^2 + 6X - 4) \subset \text{Im}(\psi).$$

Comme $X - 1$ et $X^3 - 3X^2 + 6X - 4$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, donc $\dim(\text{Vect}(X - 1, X^3 - 3X^2 + 6X - 4)) = 2$. Comme $\dim(\text{Im}(\psi)) = 2$, on en déduit que

$$\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(X - 1, X^3 - 3X^2 + 6X - 4), \quad \text{rg}(\psi) = 2$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors, en notant $Q = P(2 - X)$, on a

$$\begin{aligned} \psi(\psi(P)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(P - Q)(X) - \frac{1}{2}(P - Q)(2 - X) \right] \\ &= \frac{1}{4} [P(X) - Q(X) - P(2 - X) + Q(2 - X)] \\ &= \frac{1}{4} [P(X) - P(2 - X) - P(2 - X) + P(2 - (2 - X))] \\ &= \frac{1}{4} [P(X) - 2P(2 - X) + P(X)] \\ &= \frac{1}{2} [P(X) - P(2 - X)] \\ &= \psi(P) \end{aligned}$$

Donc $\psi \circ \psi = \text{id}$.

On en déduit que ψ est un projecteur de $\mathbb{R}_3[X]$. Cela implique que son noyau et son image sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution 19 – Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} f(f(x, y, z)) &= f\left(\frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z)\right) \\ &= \frac{1}{3}f(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z) \\ &= \frac{1}{9}\left(x - 2y - 2z - 2(-2x + y - 2z) - 2(-2x - 2y + z),\right. \\ &\quad \left.-2(x - 2y - 2z) + (-2x + y - 2z) - 2(-2x - 2y + z),\right. \\ &\quad \left.-2(x - 2y - 2z) - 2(-2x + y - 2z) + (-2x - 2y + z)\right) \\ &= \frac{1}{9}(9x, 9y, 9z) = (x, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi, $s \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$, donc s est une symétrie.

On cherche désormais quels vecteurs sont invariants ou anti-invariants par s .

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (x, y, z) &\iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 3x \\ -2x + y - 2z = 3y \\ -2x - 2y + z = 3z \end{cases} \\ &\iff -2x - 2y - 2z = 0 \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, -1) \end{aligned}$$

On note donc $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = -(x, y, z) &\iff \begin{cases} x - 2y - 2z = -3x \\ -2x + y - 2z = -3y \\ -2x - 2y + z = -3z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ &\iff \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) \end{aligned}$$

On note donc $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Donc f est la symétrie par rapport à F par rapport à G .

Solution 20 – Rappelons que si p et q sont des projecteurs, alors $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.

- Si $p \circ q = p$: Soit $x \in \ker(q)$. Alors $q(x) = 0$. Donc $p(q(x)) = p(0) = 0$. Or, $p \circ q = p$, donc $p(x) = p(q(x)) = 0$. D'où $x \in \ker(p)$ et $\ker(q) \subset \ker(p)$.
• Si $\ker(q) \subset \ker(p)$: Alors, pour tout $x \in E$, on écrit $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in \ker(q)$ et $x_I \in \text{Im}(q)$. Alors :

$$p(q(x) - x) = p(x_I - x_K - x_I) = p(x_K).$$

Or $\ker(q) \subset \ker(p)$, donc $x_K \in \ker(p)$ et $p(x_K) = 0$. On a donc obtenu

$$p(q(x) - x) = 0$$

$$p(q(x)) - p(x) = 0$$

Donc $p \circ q = p$.

On a bien $p \circ q = p$

iff $\ker(q) \subset \ker(p)$.

2. • Si $p \circ q = q$: Soit $y \in \text{Im}(q)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = q(x) = p(q(x))$. Donc $x \in \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$.

• Si $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$: Alors, pour tout $x \in E$, on écrit $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in \ker(q)$ et $x_I \in \text{Im}(q)$. Alors : $p(q(x)) = p(x_I)$. Comme $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$, on a $x \in \text{Im}(p)$. Par propriété des projecteurs, on en déduit que $p(x_I) = x_I$. D'où

$$p(q(x)) = x_I = q(x).$$

Donc $p \circ q = q$.

On a bien $p \circ q = q$

iff $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$.

Solution 21 – • Le sens direct a déjà été prouvé dans l'exercice ??.

• Si $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par f .

Soit $x \in E$. Alors $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in \ker(p)$ et $x_I \in \text{Im}(p)$. Comme ces deux ensembles sont stables par f , on a $y_K = f(x_K) \in \ker(p)$ et $y_I = f(x_I) \in \text{Im}(p)$.

$$p(f(x)) = p(f(x_I)) + p(f(x_K)) = p(y_I) + p(y_K) = y_I + 0 = y_I.$$

$$f(p(x)) = f(p(x_I)) + f(p(x_K)) = f(x_I) + f(0) = y_I + 0 = y_I.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $f \circ p(x) = p \circ f(x)$, donc $f \circ p = p \circ f$.

On a donc montré l'équivalence.

Solution 22 –

1. Soit $y \in \text{Im}(u + v)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u + v)(x)$. Donc $y = u(x) + v(x)$, donc $y \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

D'où $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

2. D'après la question 1,

$$\dim(\text{Im}(u + v)) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v))$$

D'après la formule de Grassmann (les espaces considérés sont bien de dimension finie), $\dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v))$. D'où $\dim(\text{Im}(u + v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v))$, c'est-à-dire

$$\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

On applique cela aux applications linéaires $u + v$ et $-v$. On a alors

$$\text{rg}(u + v - v) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v)$$

Or v et $-v$ sont de même rang, donc

$$\text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u + v).$$

Le même raisonnement avec $u + v$ et $-u$ donne $\text{rg}(v) - \text{rg}(u) \leq \text{rg}(u + v)$. Finalement, on obtient bien $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.

3. (a) Soit $y \in \text{Im}(v)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Donc

$$u(y) = u(v(x)) = 0 \text{ car } u \circ v \text{ est l'application nulle. Donc } y \in \ker(u).$$

D'où $\text{Im}(v) \subset \ker(u)$.

(b) On en déduit que $\dim(\text{Im}(v)) \leq \dim(\ker(u))$, i.e. $\text{rg}(v) \leq \dim(\ker(u))$. Or, le théorème du rang appliqué à u (E est bien de dimension finie) nous dit que

$$\text{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$$

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq \dim(E).$$

(c) $u + v$ est inversible (autrement dit bijective) donc son rang est $\dim(E)$. On a montré dans la question 2 que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$, donc

$$\dim(E) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

Combiné à la question précédente, cela montre bien que

$$\dim(E) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

Solution 23 –

1. Soient $\lambda, \mu, v \in \mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda \cos + \mu \sin + v \exp)'' = -\lambda \cos - \mu \sin + v \exp$$

Donc pour tout $f \in F$, $f'' \in F$.

2. (a) φ est bien une application de F dans F d'après la question 1.

Soient $f, g \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\varphi(\lambda f + g) = (\lambda f + \mu g)'' = \lambda f'' + \mu g'' = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g).$$

Donc φ est linéaire. C'est bien un endomorphisme de F .

(b) $\varphi \circ \varphi : f \mapsto f^{(4)}$.

Or, $\cos^{(4)} = \cos, \sin^{(4)} = \sin$ et $\exp^{(4)} = \exp$. Ainsi, $\varphi \circ \varphi$ coïncide avec l'identité sur une base de F , donc $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_F$.

(c) On en déduit que φ est une symétrie de F .

$\varphi(\exp) = \exp$, donc $\exp \in \ker(\varphi - \text{Id})$. On en déduit que $\text{Vect}(\exp) \subset \ker(\varphi - \text{Id})$, et donc que $\dim(\ker(\varphi - \text{Id})) \geq 1$.

$\varphi(\sin) = -\sin$ et $\varphi(\cos) = -\cos$, donc $\{\sin, \cos\} \subset \ker(\varphi + \text{Id})$. On en déduit que $\text{Vect}(\sin, \cos) \subset \ker(\varphi + \text{Id})$, et donc que $\dim(\ker(\varphi + \text{Id})) \geq 2$, car la famille (\sin, \cos) est libre (voir cours), donc de rang 2.

Or, comme φ est une symétrie, $\dim(\ker(\varphi - \text{Id}))$ et $\dim(\ker(\varphi + \text{Id}))$ sont supplémentaires dans F , donc la somme de leur dimension vaut $\dim(F) = 3$.

On en déduit que $\dim(\ker(\varphi - \text{Id})) = 1$ puis que $\text{Vect}(\exp) = \ker(\varphi - \text{Id})$, et que $\dim(\ker(\varphi + \text{Id})) = 2$ puis que $\text{Vect}(\sin, \cos) = \ker(\varphi + \text{Id})$.

Donc φ est la symétrie par rapport à $G = \text{Vect}(\exp)$ parallèlement à $H = \text{Vect}(\sin, \cos)$.

(d) La projection sur G parallèlement à H , notée p , vérifie : $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id})$. Donc, pour

$$\text{tout } f \in F, p(f) = \frac{1}{2}(f'' + f).$$

De même, la projection sur H parallèlement à G , notée q , vérifie :

$$q = \frac{1}{2}(\text{Id} - s). \text{ Donc, pour tout } f \in F, q(f) = \frac{1}{2}(f - f'').$$

Solution 24 –

1. On a vu dans le cours que l'identité et la conjugaison sont linéaires. Par combinaison d'applications linéaires, p est donc linéaire. Comme elle va de \mathbb{C} dans lui-même, c'est un endomorphisme de \mathbb{C} .

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, en notant $z = a + ib$ sa forme algébrique, on a

$$p(z) = \frac{1}{2}(a + ib) + \frac{i}{2}(a - ib) = \frac{a+b}{2}(1+i)$$

Par linéarité, comme $p(1+i) = \frac{1}{2}(1+i+i(1-i)) = 1+i$, on a

$$p(p(z)) = \frac{a+b}{2}p(1+i) = \frac{a+b}{2}(1+i) = p(z)$$

Donc $p \circ p = p$ et p est un projecteur.

$$z \in \ker(p) \iff z + i\bar{z} = 0 \iff a + ib = -ia - b \iff a = -b$$

Donc $\ker(p) = \text{Vect}(1-i)$. Par le théorème du rang, comme \mathbb{C} est de dimension 2 et $\ker(p)$ est de dimension 1, $\text{Im}(p)$ est de dimension 1.

On a déjà vu que $1+i \in \text{Im}(p)$, donc $\text{Im}(p) = \text{Vect}(1+i)$.

Solution 25 – On définit l'application $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2)) \end{matrix}$.

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P(1) + Q(1), \lambda P(2) + Q(2)) = \lambda(P(1), P(2)) + (Q(1), Q(2)) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

donc φ est linéaire.

On cherche donc à résoudre l'équation linéaire $\varphi(P) = (1, 1)$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Le polynôme constant égal à 1 est une solution particulière de l'équation.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$P \in \ker(\varphi) \iff (X-1)(X-2) \mid P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X-1)(X-2)Q$$

Donc $\ker(\varphi) = \{(aX+b)(X-1)(X-2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

D'après le résultat sur les équations linéaires, l'ensemble recherché est

$$\{1 + (aX+b)(X-1)(X-2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Solution 26 – Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}, \quad P \mapsto P(\alpha).$$

Cette application est linéaire et non nulle car $\varphi(1) = 1$. De plus

$$\ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\alpha) = 0\}.$$

Or le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Donc

$$H = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$.

Par ailleurs,

$$P(\alpha) = 0 \iff (X-\alpha) \text{ divise } P,$$

donc

$$H = (X-\alpha)\mathbb{C}[X].$$

Comme $(X^k)_{k \geq 0}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$, une base de H est

$$\boxed{\left((X-\alpha)X^k \right)_{k \geq 0}}.$$

Solution 27 – Comme H_1 et H_2 sont des hyperplans de E et $\dim(E) = n$, on a

$$\dim(H_1) = \dim(H_2) = n - 1.$$

On utilise la formule de Grassmann :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2).$$

Supposons que $H_1 + H_2 \neq E$. Alors $\dim(H_1 + H_2) \leq n - 1$. Or

$$H_1 \subset H_1 + H_2$$

et $\dim(H_1) = n - 1$, donc nécessairement

$$H_1 + H_2 = H_1.$$

De manière symétrique, $H_2 = H_1 + H_2$ et donc $H_1 = H_2$, ce qui contredit l'hypothèse qu'ils sont distincts. Ainsi

$$H_1 + H_2 = E.$$

donc

$$\dim(H_1 + H_2) = n.$$

Ainsi

$$n = (n - 1) + (n - 1) - \dim(H_1 \cap H_2).$$

D'où

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2.$$

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!