

EXERCICES — CHAPITRE 27

Exercice 1 (♣) – Sans les calculer, comparer les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 dx \quad J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$$

Exercice 2 (♥) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x) dx$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq c^n$ où $c \in]0; 1[$ est une constante à déterminer. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Indication :

1. A quel ensemble appartient $\sin(x)$?
2. Pas besoin de calculer l'intégrale ici.

Exercice 3 (♠) – Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Indication : Les mots importants sont "continue" et "[0, 1]".

Exercice 4 (♠) – Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$ si, et seulement si, $f \geq 0$ ou $f \leq 0$.

Indication : Commencer par faire des dessins pour voir ce qui se passe.

Exercice 5 (♠) – Calculer, si elle existe, la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

Indication : Encadrer "subtilement" $\cos(t)$ lorsque x est proche de 0.

Exercice 6 (♥) – Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi/4]$. En intégrant par parties, montrer que la suite de terme général $\int_0^{\pi/4} f(t) \sin(nt) dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : Si on nous dit que f est \mathcal{C}^1 , peut-être bien que c'est elle qu'on va dériver.

Exercice 7 (♥) – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_0^1 P^2(x) dx = 0$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 8 (♠) – Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$.

On définit la fonction F sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x).$$

Justifier que F est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire une égalité. Interpréter géométriquement ce résultat.

Indication : Pas besoin de taux d'accroissement ici.

Une fois que vous avez la dérivée de F , déduisez-en F .

Exercice 9 (♥) –

1. Calculer les limites des suites dont le terme général est :

$$1. \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad 2. \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad 3. \quad u_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}$$

$$4. \quad u_n = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \dots + \sqrt[n]{2n}) \quad 5. \quad u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}$$

2. Déterminer un équivalent des suites dont le terme général est :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2 + k^2} \quad u_n = \sum_{k=1}^n k^a \quad (a \in]-1; +\infty[)$$

Exercice 10 (♥) – Déterminer les limites éventuelles des suites dont les termes généraux sont :

$$1. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad 2. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2} \quad 3. \quad u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}}$$

$$4. \quad u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} \quad 5. \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3}$$

Exercice 11 (♥) – Montrer que : $\forall x \in [0; \pi], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Indication : Ça sent la formule de Taylor! Mais laquelle?

Exercice 12 (♥) – Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Majorer l'erreur commise en approchant $\ln(1+x)$ par $x - \frac{x^2}{2}$.

Indication : Ça sent la formule de Taylor! Mais laquelle?

L'erreur est plus petite que $\frac{x^3}{3}$.

Exercice 13 (♠) – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$.

Indication : Ça sent la formule de Taylor! Mais laquelle?

La limite est $f''(a)$.

Exercice 14 (♠) – Déterminer le domaine de définition et un équivalent simple en $+\infty$ de

$$F : x \mapsto \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt$$

Exercice 15 (♥) – Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e t^2 (\ln(t))^n dt$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer la limite de (I_n) .
4. Donner un équivalent de la suite (I_n) .

Exercice 16 (♠) – On pose pour tout réel x non nul, $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Vérifier que f est paire.
3. Vérifier que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.
4. (a) Rechercher la limite éventuelle de f en $+\infty$.
(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{x^2 + t^2} dt$. En déduire la limite éventuelle de f à droite en 0.

5. Donner l'allure de la représentation graphique de f .

Exercice 17 (♥) – Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt \quad \text{Et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

1. Calculer J_1 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$, et en déduire la limite de la suite (J_n) .
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
5. Donner un équivalent de (I_n) .

Exercice 18 (♥) – Soit H la fonction définie par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Démontrer que la fonction H est définie sur $I =]0, 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in I$, déterminer le signe de $H(x)$.
3. Étudier les limites de H en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\frac{H(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \frac{H(x)}{x}.$$

5. Calculer pour tout $x > 1$,

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}.$$

6. En déduire que H admet une limite en 1^+ et la déterminer.
7. Adapter le raisonnement précédent pour prouver que H admet une limite en 1^- et la déterminer.
8. En déduire que H est prolongeable par continuité sur \mathbb{R}_+ . On note encore H ce prolongement.
9. En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
10. Dresser le tableau des variations de la fonction H .

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!