

EXERCICES — CHAPITRE 27

Solution 1 – Pour tout $x \in [0, 1]$, $x^4 \leq 1 + x^4$, donc par croissance de la racine carrée, $x^2 \leq \sqrt{1 + x^4}$. Par croissance de l'intégrale entre 0 et 1, on a $I \leq J$.

Solution 2 –

1. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\sin(x) \in [0, 1]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \sin(x)^n \leq \sin(x)^{n-1}$.

En intégrant cette relation entre 0 et $\frac{\pi}{4}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 0 dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)^n dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)^{n-1} dt.$$

$$0 \leq u_n \leq u_{n-1}.$$

Donc u est décroissante et positive.

2. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\sin(x) \leq \sin(\frac{\pi}{4}) = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ par croissance de sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}^+ , on a donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(x)^n \leq c^n$. En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, on a donc

$$u_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} c^n dt = \frac{\pi}{4} c^n \leq c^n.$$

Comme $c \in]0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^n = 0$ et donc par théorème des gendarmes, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution 3 – f est continue sur un segment donc est borné. Notons donc $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. On a alors :

$$\begin{aligned} |I_n| &= \left| \int_0^1 f(t) t^n dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(t) t^n| dt \\ &\leq M \int_0^1 t^n dt \\ &\leq M \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &\leq \frac{M}{n+1} \end{aligned}$$

$\left(\frac{M}{n+1}\right)$ converge vers 0, donc d'après le théorème du gendarme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Solution 4 –

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \iff \int_a^b f(t) dt = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\text{Ou } - \int_a^b f(t) dt = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\iff 0 = \int_a^b (|f(t)| - f(t)) dt \text{ Ou } 0 = \int_a^b (|f(t)| + f(t)) dt$$

Comme pour tout $t \in [a, b]$ on a $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$, on a $|f(t)| - f(t) \geq 0$ et $|f(t)| + f(t) \geq 0$

De plus, $|f| + f$ et $|f| - f$ sont continues sur $[a, b]$ et l'intégrale sur un segment d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle. D'où :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \iff |f| - f = 0 \text{ Ou } |f| + f = 0$$

$$\iff |f| = f \text{ Ou } |f| = -f$$

$$\iff f \geq 0 \text{ Ou } f \leq 0$$

Solution 5 – Soit $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$. Alors pour tout $t \in [x, 2x]$, on a

$$\cos(2x) \leq \cos(t) \leq 1.$$

En divisant par t et en intégrant cette relation entre x et $2x$, on a

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(2x)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

$$\cos(2x) [\ln(t)]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq [\ln(t)]_x^{2x}$$

$$\cos(2x) \ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \ln(2)$$

En faisant tendre x vers 0, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(2)$.

Pour tout $x < 0$, on effectue dans l'intégrale le changement de variable (de classe \mathcal{C}^1) $u = -t$. On obtient alors

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-du) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

Donc $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est paire, donc admet la même limite en 0^- qu'en 0^+ . Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(2)$$

Solution 6 – Soit $n \in \mathbb{N}$.

f et $t \mapsto \frac{-1}{n} \cos(nt)$ sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, donc en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} f(t) \sin(nt) dt &= \left[f(t) \frac{-1}{n} \cos(nt) \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} f'(t) \frac{-1}{n} \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{n} \left(f(0) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \int_0^{\pi/4} f'(t) \cos(nt) dt \right) \end{aligned}$$

Essayons de borner $A_n = \left(f(0) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \int_0^{\pi/4} f'(t) \cos(nt) dt \right)$.

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq \left| f(0) \right| + \left| f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right| + \left| \int_0^{\pi/4} f'(t) \cos(nt) dt \right| \\ &\leq \left| f(0) \right| + \left| f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| + \int_0^{\pi/4} |f'(t) \cos(nt)| dt \\ &\leq \left| f(0) \right| + \left| f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| + \int_0^{\pi/4} |f'(t)| dt \end{aligned}$$

On note $M = \left| f(0) \right| + \left| f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| + \int_0^{\pi/4} |f'(t)| dt$. Il s'agit bien d'une constante. Donc :

$$\left| \int_0^{\pi/4} f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{M}{n}$$

$\frac{M}{n} \rightarrow 0$, donc $\int_0^{\pi/4} f(t) \sin(nt) dt$ converge vers 0.

Solution 7 – \tilde{P} est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc elle est nulle sur $[0, 1]$. On a donc que pour tout $x \in [0, 1]$, $\tilde{P}^2(x) = 0$ et donc $\tilde{P}(x) = 0$. Ainsi, P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

Solution 8 – $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est une primitive de f sur \mathbb{R} , donc est dérivable sur \mathbb{R} , sa dérivée est f .

$\varphi : x \mapsto \int_0^x f^{-1}(t) dt$ est une primitive de f^{-1} sur \mathbb{R} donc est dérivable sur \mathbb{R} . Par composition, $\varphi \circ f$ est également dérivable sur \mathbb{R} .

$x \mapsto xf(x)$ est aussi dérivable sur \mathbb{R} .

Ainsi, F est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

Donc F est constante sur \mathbb{R} .

$F(0) = \int_0^0 f(t) dt + \int_0^0 f^{-1}(t) dt - 0 = 0$. Donc F est la fonction nulle.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x) - \int_0^x f(t) dt.$$

$xf(x)$ est l'aire du rectangle de cotés x et $f(x)$ et $\int_0^x f(t) dt$ est l'aire sous la courbe de f entre les points d'abscisses 0 et x .

Ainsi, l'aire sous la courbe de f^{-1} entre 0 et $f(x)$ est égale à la différence de ces deux aires. En fait, c'est l'aire entre la courbe de f et l'axe des ordonnées.

Solution 9 –

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction $\begin{matrix} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(\pi x) \end{matrix}$.

f est continue sur $[0, 1]$, donc d'après le théorème des sommes de Riemann,

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 f = \left[\frac{-1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{2}{\pi}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction $\begin{matrix} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x} \end{matrix}$.

f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème des sommes de Riemann,

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 f = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(2)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction $\begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(1+x)^2} \end{matrix}$.

f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème des sommes de Riemann,

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 f = \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{n/k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction $\begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^x \end{matrix}$.

f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème des sommes de Riemann,

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 f = \left[\frac{1}{\ln(2)} 2^x \right]_0^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ln(2)}$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction $\begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{matrix}$.

f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème des sommes de Riemann,

$(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_1^2 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^2 = 2 \ln(2) - 1.$$

Donc $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $2 \ln(2) - 1$ et par continuité de \exp , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $e^{2 \ln(2) - 1} = \frac{4}{e}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k^2}{n^2}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction $\begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{matrix}$.

f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème des sommes de Riemann,

$(\frac{1}{n} u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 f = [x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Donc $(\frac{1}{n} u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1 - \frac{\pi}{4}$ et

$$u_n \sim n \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^{a+1}} u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction $\begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a \end{matrix}$.

f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème des sommes de Riemann,

$\left(\frac{1}{n^{a+1}} u_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 f = \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{a+1}.$$

Donc $\left(\frac{1}{n^{a+1}} u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{a+1}$ et $u_n \sim \frac{n^{a+1}}{a+1}$.

Solution 10 –

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. f est continue sur $[0, 1]$, donc par théorème des sommes

de Riemann, u converge vers $\int_0^1 f(t) dt$.

$$\lim_{+\infty} u = \int_0^1 f(t) dt = [\sqrt{1+2x}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$. f est continue sur $[0, 1]$, donc par théorème des sommes

de Riemann, u converge vers $\int_0^1 f(t) dt$.

$$\lim_{+\infty} u = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\text{Arctan}(t) + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x e^{-x}$. f est continue sur $[0, 1]$, donc par théorème des sommes de

Riemann, u converge vers $\int_0^1 f(t) dt$. En intégrant par parties, on a

$$\lim_{+\infty} u = [t(-e^{-t})]_0^1 - \int_0^1 -e^{-t} dt = -e^{-1} + [-e^{-t}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n} k\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k+n) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n) + \ln\left(\frac{k}{n} + 1\right) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n} n \ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n} + 1\right) \\ &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$. f est continue sur $[0, 1]$, donc par théorème des sommes

de Riemann, $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f(t) dt$.

$$\int_0^1 f(t) dt = [(x+1) \ln(x+1) - (x+1)]_0^1 = 2 \ln(2) - 1$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \exp(2 \ln(2) - 1) = \frac{4}{e}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+8\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{8x^2}{1+8x^3}$. f est continue sur $[0, 1]$, donc par théorème des sommes

de Riemann, u converge vers $\int_0^1 f(t) dt$.

$$\lim_{+\infty} u = \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{24t^2}{1+8t^3} dt = \left[\frac{1}{3} \ln(|1+8t^3|) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln(9) = \frac{2}{3} \ln(3)$$

Solution 11 – \sin est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 en 0, on a :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{\sin^{(4)}(t)}{3!} (x-t)^3 dt.$$

Pour tout t entre 0 et x , $\frac{\sin^{(4)}(t)}{3!} (x-t)^3 \geq 0$, donc $\int_0^x \frac{\sin^{(4)}(t)}{3!} (x-t)^3 dt \geq 0$.

D'où $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 5 en 0, on a :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \int_0^x \frac{\sin^{(6)}(t)}{5!} (x-t)^5 dt.$$

Pour tout t entre 0 et x , $\frac{\sin^{(6)}(t)}{5!} (x-t)^5 = \frac{-\sin(t)}{5!} (x-t)^5 \leq 0$, donc $\int_0^x \frac{\sin^{(6)}(t)}{5!} (x-t)^5 dt \leq 0$.

D'où $\sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Solution 12 – $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$. En appliquant l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq M \frac{|x|^3}{3!}.$$

où M est un majorant de $f^{(3)}$ sur $[0, x]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

On peut donc prendre $M = 2$ et on obtient

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq \frac{|x|^3}{3}.$$

Solution 13 – f est de classe C^2 sur \mathbb{R} . D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a , pour tout $h > 0$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} &= \frac{1}{h^2} (f(a) + hf'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) - 2f(a) \\ &\quad + f(a) - hf'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2)) \\ &= f''(a) + o_{h \rightarrow 0}(1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

Solution 14 – $f : t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ est définie et continue sur $[-1, +\infty[$. Donc, F est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $[x, x+1] \subset [-1, +\infty[$. Donc F est définie sur $[-1, +\infty[$. f est une fonction croissante sur $[-1, +\infty[$ (car c'est une composée de fonctions croissantes), donc, pour tout $x \geq -1$ et pour tout $t \in [x, x+1]$, on a

$$\sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{1+t^3} \leq \sqrt{1+(x+1)^3}$$

On utilise alors la croissance de l'intégrale pour obtenir :

$$\int_x^{x+1} \sqrt{1+x^3} dt \leq \int_x^{x+1} \sqrt{1+t^3} dt \leq \int_x^{x+1} \sqrt{1+(x+1)^3} dt$$

Les deux extrémités sont des intégrales de fonctions constantes sur un segment de longueur 1, donc

$$\sqrt{1+x^3} \leq F(x) \leq \sqrt{1+(x+1)^3}$$

En supposant $x > 0$, on peut diviser par $\sqrt{x^3}$ pour obtenir :

$$\sqrt{\frac{1}{x^3} + 1} \leq \frac{F(x)}{\sqrt{x^3}} \leq \sqrt{\frac{1}{x^3} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3} + 1} = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3}$, on a par théorème d'encadrement que

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x^3}$$

Solution 15 –

$$1. I_0 = \int_1^e t^2 dt = \frac{e^3 - 1}{3}.$$

$I_1 = \int_1^e t^2 \ln(t) dt$. On procède à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{t^3}{3} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e t^2 dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^e \\ I_1 &= \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [1, e]$, comme $\ln(t) \in [1, e]$, on a

$$\begin{aligned} \ln(t)^n &\geq \ln(t)^{n+1} \\ t^2 \ln(t)^n &\geq t^2 \ln(t)^{n+1} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_n \geq I_{n+1}$, donc I est décroissante. De plus, I_n étant l'intégrale d'une fonction positive, elle est positive. Comme I est une suite décroissante minorée, elle converge.

3. On sait que pour tout $t \in [1, e]$, on a $\ln(t) \leq \frac{t}{e}$, donc $t^2 \ln(t)^n \leq \frac{t^{2+n}}{e^n}$. Par croissance de l'intégrale,

$$I_n \leq \int_1^e \frac{t^{2+n}}{e^n} dt = \frac{1}{e^n} \left[\frac{1}{3+n} t^{3+n} \right]_1^e = \frac{1}{3+n} \left(e^3 - \frac{1}{e^n} \right)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3+n} \left(e^3 - \frac{1}{e^n} \right) = 0$. Comme on a aussi $I_n \geq 0$, par théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4. On procède à une intégration par parties. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{t^3}{3} \ln(t)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \cdot \frac{n+1}{t} \ln(t)^n dt \\ 3I_{n+1} &= e^3 - (n+1)I_n \end{aligned}$$

Or, $(I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après la question précédente, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = e^3$$

On en déduit que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^3}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^3}{n}$

Solution 16 -

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc son intégrale est bien définie. Donc f est bien définie.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{(-x)^2 + t^2} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt = f(x).$$

Donc f est bien paire.

3. Soient x et y tels que $x > y > 0$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.

Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $x^2 + t^2 > y^2 + t^2$, donc

$$\frac{1}{x^2 + t^2} < \frac{1}{y^2 + t^2}.$$

Comme $\sin(t) \geq 0$, on en déduit

$$\frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} \leq \frac{\sin(t)}{y^2 + t^2}.$$

En intégrant cette relation entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{y^2 + t^2} dt,$$

c'est à dire $f(x) \leq f(y)$. Donc f est décroissante sur \mathbb{R}^* .

4. (a) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + t^2} dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} dt \\ &\leq \frac{1}{x^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \\ &\leq \frac{\pi}{2x^2} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2x^2} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(b) On définit $g : t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(t) - t$. g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = \frac{\pi}{2} \cos(t) - 1, \quad g''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin(t).$$

g'' est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc g' est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$g'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$, donc d'après le théorème de la bijection, g' s'annule une unique fois sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi, g est croissante puis décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$g(0) = 0$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc g est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}.$$

D'où

$$\frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} \geq \frac{2t}{\pi(x^2 + t^2)}.$$

En intégrant cette relation entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$f(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{x^2 + t^2} dt$$

Or,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{x^2 + t^2} dt = \frac{1}{\pi} [\ln(x^2 + t^2)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{x^2 + (\pi/2)^2}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + (\pi/2)^2}{x^2} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{x^2 + (\pi/2)^2}{x^2}\right) = +\infty.$$

Donc la limite à droite de f en 0^+ est $+\infty$.

5. On en déduit que f a une allure proche de celle de la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|}$.

Solution 17 -

$$1. J_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et donc $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$. Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en faisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(1+t^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2} \end{aligned}$$

4. Comme J converge vers 0, $(J_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ également, et donc, par opérations sur les limites, I converge vers 0.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+1)I_n}{\ln(2)} = 1 - \frac{2}{\ln(2)} J_{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Donc } I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}.$$

Solution 18 -

1. $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Donc H est définie en un réel x si et seulement si $[x, x^2] \subset]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Ce n'est pas le cas si $x \leq 0$ ou si $x = 1$.

Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < 1$. Si $x > 1$, alors $x^2 > 1$. Dans les deux cas, $[x, x^2] \subset]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Ainsi, H est bien définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2. Si $x > 1$, $H(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive entre deux bornes dans l'ordre croissant, donc $H(x) \geq 0$.

Si $0 < x < 1$, $H(x)$ est l'intégrale d'une fonction négative entre des bornes décroissantes, (car $x^2 < x$), donc $H(x) \geq 0$.

3. • Soit $x > 1$. Alors, $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est décroissante sur $[x, x^2]$, donc, par croissance de l'intégrale, on a

$$H(x) \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(x^2)} = \frac{x^2 - x}{2\ln(x)}$$

$$\text{Or } \frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ par croissances comparées.}$$

Ainsi, par théorème du gendarme, $\lim_{+\infty} H = +\infty$.

- On procède manière similaire au voisinage de 0. Soit $x \in]0, 1[$. Pour tout $t \in [x^2, x]$, on a :

$$\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$$

Donc, par décroissance de la fonction inverse,

$$\frac{1}{\ln(x^2)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)} < 0$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, comme $x^2 < x$, on a

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x)} dt$$

$$\frac{x - x^2}{\ln(x^2)} \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \frac{x - x^2}{\ln(x)}$$

En remarquant que $x - x^2 \in]0, 1[$ et en échangeant les bornes, on a

$$\frac{-1}{\ln(x^2)} \geq H(x) \geq \frac{-1}{\ln(x)}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$, par théorème des gendarmes on a que $\lim_{0^+} H = 0$.

4. Soit $x > 1$. Alors, pour tout $t \in [x, x^2]$, on a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x^2}$. Comme $\ln(t) > 0$, on en déduit que

$$\frac{1}{x \ln(t)} \geq \frac{1}{t \ln(t)} \geq \frac{1}{x^2 \ln(t)}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{x \ln(t)} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{x^2 \ln(t)} dt$$

$$\frac{H(x)}{x} \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \frac{H(x)}{x^2}$$

5. Pour tout $x > 1$, on a

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(|\ln(t)|)]_x^{x^2} = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2 \ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2)$$

En effet, $\ln(x)$ et $\ln(x^2)$ sont positifs car $x > 1$.

6. D'après les deux questions précédentes, on a pour tout $x > 1$ que

$$\ln(2)x \leq H(x) \leq \ln(2)x^2$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(2)x = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(2)x^2 = \ln(2)$, on a par théorème des gendarmes que $\lim_{1^+} H = \ln(2)$.

7. Soit $x \in]0, 1[$. Alors, pour tout $t \in [x^2, x]$, on a $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x^2}$. Comme $\ln(t) < 0$, on en déduit que

$$\frac{1}{x \ln(t)} \geq \frac{1}{t \ln(t)} \geq \frac{1}{x^2 \ln(t)}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{x \ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^x \frac{1}{x^2 \ln(t)} dt$$

En échangeant les bornes de l'intégrale, on a

$$\frac{-H(x)}{x} \geq - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \frac{-H(x)}{x^2}$$

$$\frac{H(x)}{x} \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{H(x)}{x^2}$$

De la même manière que précédemment, on trouve que $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln(2)$ et on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{1^-} H = \ln(2)$.

8. Ainsi, H admet pour limite $\ln(2)$ en 1, donc est prolongeable par continuité en posant $H(1) = \ln(2)$.

De même, d'après la question 3, H a pour limite 0 en 0, donc est prolongeable par continuité en posant $H(0) = 0$.

9. $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, donc elle admet des primitives. Notons G une de ces primitives. G est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Alors,

$$H(x) = G(x^2) - G(x)$$

On en déduit, par composition et soustraction de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , que H est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$H'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Ainsi, H est continue sur $[0, 1[$, dérivable sur $]0, 1[$ et $\lim_0 H' = 0$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, H est de classe \mathcal{C}^1 en 0 et $H'(0) = 0$.

On a aussi que H est continue sur \mathbb{R}_+^* , dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, et $\lim_1 H' = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln'(1)} = 1$ (on a reconnu la limite d'un taux d'accroissement), donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, H est de classe \mathcal{C}^1 en 1 et $H'(1) = 1$.

Finalement, H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

10. On remarque que H' obtenue à la question précédente est toujours positive, sauf en 0, donc on H est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

x	0		1		$+\infty$
$H'(x)$	0	+	1	+	
H	0				$+\infty$

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!