

EXERCICES — CHAPITRE 26

Exercice 1 (♣) – Soient A, B et C trois événements.

Exprimer en terme ensembliste les événements suivants :

1. "A et B sont réalisés",
2. "seulement A est réalisé",
3. "aucun des événements A, B, C n'est réalisé",
4. "un seul des événements A, B, C est réalisé",
5. "au moins deux des trois événements A, B, C sont réalisés",
6. "pas plus de deux des trois événements A, B, C sont réalisés".

Exercice 2 (♣) – On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements suivants :

- A : "les deux cartes tirées sont rouges",
- B : "les deux cartes tirées sont un valet et un dix",
- C : "les deux cartes tirées sont des figures".

1. Que représentent les ensembles suivants?

- | | |
|--|---|
| (a) \bar{A}
(b) $A \cap B \cap \bar{C}$ | (c) $(A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C})$
(d) $(A \cap B) \cap C$ |
|--|---|

2. Écrire à l'aide des ensembles A, B et C les événements

- (a) F : "les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges",
- (b) G : "on obtient au plus une figure".

Exercice 3 (♣) – Dans une boîte, il y a quatre jetons disponibles numérotés de 1 à 4.

On tire simultanément au hasard deux jetons.

1. Donner tous les tirages possibles.

Pour la suite, on note A l'événement "les deux jetons sont pairs".

2. Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants : \bar{A} , $A \cup \bar{A}$ et $A \cap \bar{A}$.
3. On considère C l'événement "la somme des chiffres sur les deux jetons est paire".
Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants?

$$\bar{C}, \quad A \cup C, \quad A \cap C, \quad A \cup \bar{C} \text{ Et } A \cap \bar{C}.$$

Exercice 4 (♥) – Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, A_k désigne l'événement : "le k -ième lancer a fourni un 6". Exprimer les événements ci-dessous à l'aide des événements A_k et des opérations autorisées sur les événements.

1.
 - P_2 : "le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer",
 - P_5 : "le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer",
 - P_n : "le premier 6 a été obtenu au n -ième lancer", où $n \geq 2$.
2.
 - D_3 : "le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer",
 - D_4 : "le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer".

Exercice 5 (♥) – On lance un dé équilibré deux fois de suite.

1. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8?
2. Il y a 11 sommes possibles (tous les entiers entre 2 et 12). Pourquoi la probabilité calculée à la première question n'est-elle pas tout simplement égale à $\frac{1}{11}$?

Exercice 6 (♣) – On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements :

- A : "la carte choisie est un pique",
- B : "la carte choisie est rouge (coeur ou carreau)",
- C : "la carte choisie est une figure (valet, dame ou roi)".

1. Calculer les probabilités $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(B \cap C), P(A \cup B)$ et $P(B \cup C)$.
2. Calculer la probabilité de l'événement D : "la carte choisie n'est ni rouge, ni une figure".

Exercice 7 (♥) – Soient $n \geq 1$ un entier, $\Omega = \{[0; n]\}$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique valeur de a pour laquelle on définit correctement une probabilité \mathbb{P} sur Ω en posant pour tout $k \in \{[0; n]\}$,

$$\mathbb{P}(\{k\}) = a \binom{n}{k}.$$

Exercice 8 (♥) – On extrait au hasard 8 cartes d'un jeu de 32 cartes classique. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- | | |
|---------------------------------|--|
| A = «On pioche les 4 rois.»; | B = «On pioche deux carrés.»; |
| C = «On pioche un seul carré.»; | D = «On pioche au moins un carré.»; |
| E = «On pioche tous les ♥.»; | F = «On pioche quatre ♥ et quatre ♦.». |

Exercice 9 (♥) – On lance trois dés à six faces équilibrés simultanément. Calculer les probabilités des événements suivants :

- S : « Les trois nombres obtenus se suivent. »
 Q : « Obtenir un 421. »
 B : « On a obtenu un brelan. »
 D : « On a obtenu une paire. »

Exercice 10 (♥) – Soit n et p deux nombres entiers non nuls tels que $n \leq p$. On choisit au hasard une application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Donner la probabilité que cette application soit injective.

Exercice 11 (♣) – On considère une urne U_1 contenant une boule rouge et deux boules noires, ainsi qu'une urne U_2 contenant trois boules noires. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher. On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté PILE, on tire une boule dans l'urne U_1 , et si on obtient FACE, on tire une boule dans l'urne U_2 . On considère les événements suivants :

- P (resp. F) : "la pièce retombe sur le côté PILE (respectivement FACE)",
- R : "le tirage donne une boule rouge",
- N : "le tirage donne une boule noire".

Sans calcul, donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$P_P(R), \quad P_P(N), \quad P_F(R), \quad P_F(N), \quad P_R(P) \text{ Et } P_R(F).$$

Exercice 12 (♣) – On considère deux événements A et B tels que

$$P(A) = 0.2, \quad P(B) = 0.6 \text{ Et } P(A \cup B) = 0.7.$$

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. En déduire les probabilités conditionnelles $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 13 (♥) – Une urne contient huit boules rouges et deux boules noires. On tire sans remise et successivement trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 14 (♣) – On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles. La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans deux machines M_1 et M_2 . La machine M_1 remplit la bouteille de lait et la machine M_2 met le bouchon. Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5% des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8% n'ont pas de bouchon. D'autre part, 4% des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon. On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note

- R l'événement : "la bouteille est correctement remplie",
- B l'événement : "la bouteille a un bouchon".

1. Donner les valeurs de $P(R)$, $P(\bar{R})$, $P_R(B)$, $P_R(\bar{B})$, $P_{\bar{R}}(B)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{B})$.
2. Calculer $P(B)$.

Exercice 15 (♣) – Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes. On sait que

- 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'événement "les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation" et par V l'événement "les sacs contiennent des pommes de variétés différentes".

On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Donner les valeurs de $P(E)$, $P(\bar{E})$, $P_E(V)$, $P_E(\bar{V})$, $P_{\bar{E}}(V)$ et $P_{\bar{E}}(\bar{V})$.
2. Calculer $P(V)$.
3. On constate que le sac de pommes contient des pommes de variétés différentes. Calculer la probabilité qu'il ait été acheté dans un supermarché.

Exercice 16 (♥) – Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que

- s'il a arrêté le n -ième tir, la probabilité qu'il arrête le $n+1$ -ième est 0.8,
- s'il a laissé passer le n -ième tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0.6,
- la probabilité qu'il arrête le premier tir est 0.7.

On note A_n l'événement "le gardien arrête le n -ième tir". On a donc $P(A_1) = 0.7$.

1. (a) Donner pour $n \geq 1$, les valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$.
(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $P(A_{n+1}) = 0.2P(A_n) + 0.6$.
2. On pose à présent pour $n \geq 1$, $p_n = P(A_n)$ et $u_n = p_n - 0.75$.
(a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison 0.2.
(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n .

Exercice 17 (♥) – Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de colle. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'évènement "le professeur oublie ses clés le jour n " et $p_n = P(E_n)$.

On suppose qu'il oublie ses clés le premier jour avec probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose en outre que

- s'il oublie ses clés le jour n , alors il les oublie le jour $n + 1$ avec probabilité $\frac{1}{10}$,
- s'il n'oublie pas ses clés le jour n , alors il les oublie le jour $n + 1$ avec probabilité $\frac{4}{10}$.

1. Donner les valeurs des probabilités $P_{E_n}(E_{n+1})$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n.$$

3. Donner l'expression de p_n en fonction de n .

Exercice 18 (♦) – Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser. Le premier jour, le titre est stable.

- Si un jour n le titre monte, le jour $n + 1$ il montera avec la probabilité $1 - 2a$, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité a .
- Si un jour n le titre est stable, le jour $n + 1$ il montera avec la probabilité a , restera stable avec la probabilité $1 - 2a$ et baissera avec la probabilité a .
- Si un jour n le titre baisse, le jour $n + 1$ il montera avec la probabilité a , restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité $1 - 2a$.

On note M_n (resp. S_n , resp. B_n) l'évènement "le titre monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour n ". On pose $p_n = P(M_n)$, $q_n = P(S_n)$ et $r_n = P(B_n)$.

1. Expliciter p_{n+1} et q_{n+1} , en fonction de p_n , q_n et r_n .
2. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire l'expression de r_n en fonction de p_n et q_n .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = (1 - 3a)p_n + a \text{ Et } q_{n+1} = (1 - 3a)q_n + a.$$

4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_n = \frac{1}{3}(1 - (1 - 3a)^{n-1}), \quad q_n = \frac{1}{3}(1 + 2(1 - 3a)^{n-1}) \text{ Et } r_n = \frac{1}{3}(1 - (1 - 3a)^{n-1}).$$

Exercice 19 (♥) – On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
(b) Justifier l'égalité $P^{-1}AP = C$.
2. (a) Exprimer B en fonction de I_2 et A . Exprimer de même D en fonction de I_2 et C .
(b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.
(b) Pour tout entier naturel n , donner les coefficients de D^n .
(c) Déduire de 3.a) et 3.b) que pour tout entier naturel n on a : $B^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$
4. Adrien et Bob jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On suppose que c'est Adrien qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'évènement « Adrien gagne le n -ième échange » et B_n l'évènement « Bob gagne le n -ième échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.

- (a) Donner les valeurs de a_1 et b_1 . Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \frac{5}{9}$.
- (b) On observe qu'Adrien emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange?
- (c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n \geq 1$
- (d) Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n$
- (e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
- (f) Déduire de 3.c) que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$. Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 20 (♣) – On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des événements A : "on obtient le tirage 2, 4 ou 6" et B "on obtient le tirage 3 ou 6".

Exercice 21 (♥) – Dans une population de 10000 personnes, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchite. De plus, 65% des personnes ayant une bronchite sont fumeurs.

- On choisit une personne au hasard dans cette population. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - E_1 : "la personne choisie fume et a une bronchite",
 - E_2 : "la personne choisie ne fume pas et a une bronchite",
 - E_3 : "la personne choisie ne fume pas et n'a pas de bronchite".
- Fumer et avoir une bronchite sont-ils des événements indépendants?
- On choisit une personne au hasard parmi les fumeurs. Calculer la probabilité que cette personne ait une bronchite.

Exercice 22 (♣) – Dans une ville comprenant deux arrondissements A et B , la probabilité pour une entreprise de faire l'objet d'un contrôle fiscal est de $\frac{1}{4}$ dans l'arrondissement A et de $\frac{1}{5}$ dans l'arrondissement B . On suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un groupe financier possède un hypermarché implanté dans l'arrondissement A et un autre dans l'arrondissement B . Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- E_1 : "les deux hypermarchés sont contrôlés",
- E_2 : "au moins l'un des hypermarchés est contrôlés",
- E_3 : "un hypermarché et un seul est contrôlé",
- E_4 : "aucun des deux hypermarchés n'est contrôlé".

Exercice 23 (♣) – Un archer tire sur une cible située à 20m et une autre cible située à 50m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20m (resp. 50m) est d'une chance sur trois (resp. une chance sur quatre). On suppose que les trois tirs sont indépendants. L'archer gagne s'il atteint deux cibles consécutivement. Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20m et en commençant par la cible située à 50m. Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer?

Exercice 24 (♠) – Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Deux joueurs, A et B jouent une partie de tennis en un set. Le gagnant est le premier à avoir gagné deux jeux de plus que son adversaire, sauf, si au bout d'un moment, les deux concurrents ont gagné chacun n jeux, auquel cas ils se départagent au cours d'un jeu décisif. On suppose que chaque jeu joué a une probabilité p d'être remporté par A et $q = 1 - p$ d'être remporté par B .

L'univers Ω est constitué des listes de la forme (a, b, a, b, a, a) ou (a, b, a, b, a, b, d) représentant les jeux successifs, où a désigne une victoire de A , b une victoire de B et d le jeu décisif. On note :

- E_A l'événement « A gagne sans arriver au jeu décisif.»;
- E_B l'événement « B gagne sans arriver au jeu décisif.»;
- D l'événement «la partie se termine par un jeu décisif.»;
- $V_{A,k}$ l'événement « A gagne à l'issue du $(2k+2)$ -ième jeu.» où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$;
- $V_{B,k}$ l'événement « B gagne à l'issue du $(2k+2)$ -ième jeu.» où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$;
- N_k l'événement «personne n'a gagné à l'issue du $2k$ -ième jeu.» où $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
 - Décrire entièrement l'univers Ω , ainsi que les événements définis ci-dessus.
 - Calculer les probabilités de tous ces événements.
- On se place maintenant dans le cas général (n quelconque).
 - Justifier qu'une partie ne peut se terminer sans aller au jeu décisif que si le nombre de jeux joués est pair.
 - Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, justifier que $P(V_{A,k}) = P(N_k) \times p^2$. Donner une formule analogue pour $V_{B,k}$.
 - Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(N_k) = (2pq)^k$.
 - En déduire $P(E_A)$, $P(E_B)$ puis $P(D)$.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!