

EXERCICES — CHAPITRE 26

Solution 1 – J'utilise dans cet exercice le tableau du cours, faisant le lien entre terminologies probabiliste et ensembliste.

- « A et B sont réalisés » correspond à l'ensemble $A \cap B$.
- « seulement A est réalisé » signifie que A est réalisé mais que ni B ni C ne le sont. L'ensemble correspondant est donc $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
- « aucun des évènements A, B, C n'est réalisé » signifie que ni A ni B ni C ne sont réalisés. L'ensemble correspondant est donc $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
- « un seul des évènements A, B, C est réalisé » signifie que
 - soit A est réalisé, et B et C ne le sont pas,
 - soit B est réalisé, et A et C ne le sont pas,
 - soit C est réalisé, et A et B ne le sont pas.

L'ensemble correspondant est donc $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

- « au moins deux des trois évènements A, B, C sont réalisés » signifie que
 - soit les trois évènements A, B, C sont réalisés,
 - soit A et B sont réalisés, mais C ne l'est pas,
 - soit A et C sont réalisés, mais B ne l'est pas,
 - soit B et C sont réalisés, mais A ne l'est pas.

L'ensemble correspondant est donc $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$.

- Le contraire de l'évènement « pas plus de deux des trois évènements A, B, C sont réalisés » est l'évènement « les trois évènements A, B, C sont réalisés ». L'ensemble correspondant est donc $A \cap B \cap C$.

Solution 2 –

- (a) Le contraire de l'évènement A « les deux cartes tirées sont rouges » est \bar{A} « une des deux cartes tirées n'est pas rouge ».

Attention : le piège serait de penser que l'évènement contraire est « les deux cartes tirées sont noires ». Il est important de comprendre que tout tirage ne réalisant pas l'évènement « les deux cartes tirées sont rouges » réalise **par définition** l'évènement contraire. Par exemple, si une carte est rouge et que l'autre noire, l'évènement « les deux cartes tirées sont rouges » n'est pas réalisé, ce qui signifie que c'est l'évènement contraire qui est réalisé.

- $A \cap B \cap \bar{C}$: « les deux cartes tirées sont un valet rouge et un dix rouge »
 - $(A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) = A \cap B \cap \bar{C}$: « les deux cartes tirées sont un valet rouge et un dix rouge »
 - $A \cap B \cap C = \emptyset$: évènement impossible.
- « les deux cartes tirées sont des figures » correspond à l'évènement C . Le fait qu'elles ne soient pas toutes les deux rouges correspond à l'évènement \bar{A} . Ainsi $F = \bar{A} \cap C$.
 - « on obtient au plus une figure » est l'évènement contraire de C . Ainsi $G = \bar{C}$.

Solution 3 –

- L'ensemble des tirages possible est $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.
- Le seul tirage pour lequel les deux jetons sont pairs est $(2, 4)$, donc $A = \{(2, 4)\}$. \bar{A} correspond à l'ensemble des tirages pour lesquels les deux jetons ne sont pas pairs. Ainsi $\bar{A} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$. A ou \bar{A} donne bien sûr l'ensemble des tirages possibles, i.e. $A \cup \bar{A} = \Omega$. A et \bar{A} correspond bien sur à l'évènement impossible, i.e. $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- Tout d'abord, l'ensemble C est donné par $C = \{(1, 3), (2, 4)\}$. Dès lors,
 - $\bar{C} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$,
 - $A \cup C = \{(1, 3), (2, 4)\}$,
 - $A \cap C = \{(2, 4)\}$,
 - $A \cup \bar{C} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$,
 - $A \cap \bar{C} = \emptyset$.

Solution 4 –

- « le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer » signifie que l'on n'a pas obtenu de 6 au premier lancer **et** que l'on a obtenu un 6 au deuxième lancer. Ainsi $P_2 = \bar{A}_1 \cap A_2$.
 - « le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer » signifie que l'on n'a pas obtenu de 6 aux premier, deuxième, troisième et quatrième lancers, **et** que l'on a obtenu un 6 au cinquième lancer. Ainsi $P_5 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$.
 - De la même manière, $P_n = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n$.
- Si le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer, alors il y a deux possibilités :
 - soit le premier 6 a été obtenu au premier lancer et le deuxième 6 au troisième,
 - soit le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer et le deuxième 6 au troisième.

Ainsi

$$D_3 = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Si le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer, alors il y a cette fois trois possibilités :

- soit le premier 6 a été obtenu au premier lancer et le deuxième 6 au quatrième,
- soit le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer et le deuxième 6 au quatrième,
- soit le premier 6 a été obtenu au troisième lancer et le deuxième 6 au quatrième.

Ainsi

$$D_4 = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Solution 5 – Je suis ici dans une situation d'équiprobabilité.

1. L'univers Ω est donné par

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\}.$$

Donc $\text{Card}(\Omega) = 36$. Par ailleurs, si je note A l'évènement « la somme des numéros est égale à 8 », alors $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ et donc $\text{Card}(A) = 5$. Ainsi

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

2. Les 11 sommes possibles ne sont pas toutes équiprobables. Par exemple, la somme des deux dés ne vaut 2 que dans le cas où l'on a obtenu (1, 1), et cet évènement a une probabilité $\frac{1}{36}$. Alors que la somme des deux dés vaut 8 dans 5 cas différents, ce qui amène donc à une probabilité de $\frac{5}{36}$.

Solution 6 – Je suis ici dans une situation d'équiprobabilité.

1. L'ensemble Ω est constitué de toutes les cartes du jeu :

$$\Omega = \{7\heartsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 7\diamonds, \dots, \text{As}\heartsuit, \text{As}\spadesuit, \text{As}\clubsuit, \text{As}\diamonds\} \text{ Et } \text{Card}(\Omega) = 32.$$

L'ensemble A est constitué de tous les piques

$$A = \{7\spadesuit, 8\spadesuit, \dots, \text{As}\spadesuit\} \text{ Et } \text{Card}(A) = 8.$$

L'ensemble B est constitué de toutes les cartes rouges

$$B = \{7\heartsuit, 7\diamonds, 8\heartsuit, 8\diamonds, \dots, \text{As}\heartsuit, \text{As}\diamonds\} \text{ Et } \text{Card}(B) = 16.$$

L'ensemble C est constitué de toutes les cartes représentant des figures

$$C = \{\text{Valet}\heartsuit, \text{Valet}\spadesuit, \dots, \text{Roi}\spadesuit, \text{Roi}\clubsuit\} \text{ Et } \text{Card}(C) = 12.$$

Ainsi je peux d'ores et déjà affirmer que

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \text{ Et } P(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

Par ailleurs $A \cap B = \emptyset$, puisqu'une carte ne peut à la fois être un pique et être rouge. Donc $P(A \cap B) = 0$. L'évènement $B \cap C$ est constitué de toutes les figures rouges, donc

$$B \cap C = \{\text{Valet}\heartsuit, \text{Valet}\diamonds, \dots, \text{Roi}\heartsuit, \text{Roi}\diamonds\} \text{ Et } \text{Card}(B \cap C) = 6.$$

$$\text{Donc } P(B \cap C) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

Il me reste à calculer $P(A \cup B)$ et $P(B \cup C)$. Les évènements A et B étant incompatibles,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}.$$

Et pour calculer $P(B \cup C)$:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16} = \frac{8}{16} + \frac{6}{16} - \frac{3}{16} = \frac{11}{16}.$$

Remarque : Pour calculer $P(A \cup B)$ et $P(B \cup C)$, je peux également expliciter les ensembles $A \cup B$ et $B \cup C$ ainsi que leurs cardinaux, puis en déduire directement les probabilités.

$$A \cup B = \{7\heartsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, \dots, \text{As}\heartsuit, \text{As}\spadesuit, \text{As}\clubsuit\} \text{ Et } \text{Card}(A \cup B) = 24.$$

$$B \cup C = \{7\heartsuit, 7\diamonds, \dots, \text{As}\heartsuit, \text{As}\diamonds, \text{Valet}\spadesuit, \text{Valet}\clubsuit, \dots, \text{Roi}\spadesuit, \text{Roi}\clubsuit\} \text{ Et } \text{Card}(B \cup C) = 22.$$

Donc

$$P(A \cup B) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \text{ Et } P(B \cup C) = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}.$$

2. Je peux tout d'abord remarquer que $D = \overline{B \cap C} = \overline{B \cup C}$. Ainsi

$$P(D) = P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{11}{16} = \frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}.$$

Solution 7 –

Une telle probabilité existe $\Leftrightarrow \left(a \binom{n}{k} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une distribution de probabilités.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a \binom{n}{k} \geq 0 \\ \sum_{k=0}^n a \binom{n}{k} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a 2^n = 1 \end{cases} \text{ par formule du binôme}$$

$$\Leftrightarrow a = 2^{-n}$$

La seule valeur a pour laquelle on a bien défini une probabilité est $a = 2^{-n}$.

Solution 8 – On note C_a l'ensemble des 32 cartes du jeu. L'univers Ω est alors l'ensemble des parties de C_a à 8 éléments. On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme P .

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{8}.$$

Il nous faut alors dénombrer les 6 évènements proposées.

A) Un élément de A contient les 4 rois et 4 autres cartes parmi les 28 qui ne sont pas des

$$\text{rois. Donc } \text{Card}(A) = \binom{28}{4}, \text{ et } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}}.$$

B) Un élément de B contient 2 carrés et rien d'autre. Il y a donc autant d'éléments de B que de façons de choisir les 2 valeurs des carrés, soit $\binom{8}{2}$. Donc $\text{Card}(B) = \binom{8}{2}$, et $P(B) =$

$$\frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{8}} = \frac{28}{\binom{32}{8}}.$$

C) Un élément de C contient un carré (8 choix possibles pour la valeur de ce carré) et 4 autres cartes parmi les 28 restantes. Cependant, ces 4 cartes ne doivent pas former un des 7 autres carrés possibles. Il y a donc $\binom{28}{4} - 7$ possibilités pour ces 4 cartes.

$$\text{Donc } \text{Card}(C) = 8 \left(\binom{28}{4} - 7 \right), \text{ et } P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{8 \left(\binom{28}{4} - 7 \right)}{\binom{32}{8}} = \frac{8 \binom{28}{4} - 28}{\binom{32}{8}}.$$

D) $D = B \cup C$ et les évènements B et C sont incompatibles, donc

$$P(D) = P(B) + P(C) = \frac{\binom{8}{2} + 8 \left(\binom{28}{4} - 7 \right)}{\binom{32}{8}}.$$

E) Il y a une seule main contenant tous les cœurs (car il y a 8 cœurs), donc

$$\text{Card}(E) = 1 \text{ et } P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{\binom{32}{8}}.$$

F) Un élément de F contient 4 cœurs et 4 carreaux. Pour chacune des ces couleurs, il y a $\binom{8}{4}$ façons d'obtenir 4 cartes parmi les 8 de la couleur.

$$\text{Donc } \text{Card}(F) = \binom{8}{4} \times \binom{8}{4}, \text{ et } P(F) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{4} \times \binom{8}{4}}{\binom{32}{8}} = \frac{70^2}{\binom{32}{8}}.$$

Solution 9 – Pour pouvoir modéliser la situation avec les outils du cours de dénombrement, il faut ruser un peu. en effet, on va rajouter de l'ordre sur les dés. Numérotons les dés de 1 à 3.

On considère alors comme univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ ou la coordonnée i est le résultat du i -ème dé. On le munit de P la probabilité uniforme. On a $\text{Card}(\Omega) = 6^3 = 216$.

1. Dans les entiers de 1 à 6, il y a 4 ensembles de 3 nombres successifs :

$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}$.

Pour chacun de ces ensembles, il y a $3! = 6$ façons de les ordonner. Donc au total, $\text{Card}(S) = 24$ et

$$P(S) = \frac{\text{Card}(S)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}.$$

2. Il y a $3! = 6$ façons d'obtenir un « 421 ». Donc $\text{Card}(Q) = 6$ et

$$P(Q) = \frac{\text{Card}(Q)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

3. Il y a 6 valeurs de breelan possibles, et une unique façon d'obtenir chacun d'entre eux. Donc $\text{Card}(B) = 6$ et

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

4. Il y a 6 valeurs possibles pour les deux dés formant la paire.

Il y a $\binom{3}{2} = 3$ possibilités concernant lesquels des deux dés forment cette paire.

Il y a 5 valeurs possibles pour la valeur du dernier dé. Donc $\text{Card}(D) = 6 \times 3 \times 5 = 90$ et

$$P(D) = \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}.$$

Solution 10 – L'univers est $\Omega = \mathcal{F}([1, n], [1, p])$. On le munit de la probabilité uniforme P . On note A l'ensemble des applications injectives de $[1, n]$ vers $[1, p]$. Alors, d'après le cours de dénombrement, on sait que

$$\text{Card}(\Omega) = n^p, \quad \text{Card}(A) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{n!}{(n-p)! n^p}$$

Solution 11 – Si la pièce donne PILE, alors le tirage a lieu dans l'urne U_1 . Puisqu'il y a une boule blanche et deux boules noires dans l'urne U_1 , alors

$$P_P(B) = \frac{1}{3} \text{ Et } P_P(N) = \frac{2}{3}$$

Si la pièce donne FACE, alors le tirage a lieu dans l'urne U_2 . Puisqu'il n'y a que des boules noires dans l'urne U_2 , alors

$$P_F(B) = 0 \text{ Et } P_F(N) = 1$$

Enfin, si le tirage donne une boule blanche, alors le tirage a forcément eu lieu dans l'urne U_1 puisqu'il n'y a pas de boule blanche dans l'urne U_2 . Autrement dit, la pièce est retombée sur le côté PILE. Ainsi

$$P_B(P) = 1 \text{ Et } P_B(F) = 0$$

Solution 12 –

1. Je sais que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Donc en utilisant les données de l'énoncé, j'obtiens

$$0.7 = 0.2 + 0.6 - P(A \cap B) \iff P(A \cap B) = 0.2 + 0.6 - 0.7 = 0.1$$

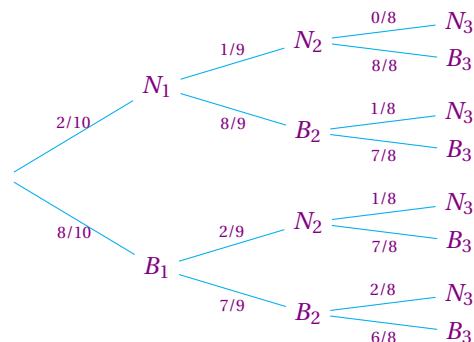
2. En appliquant la formule des probabilités conditionnelles, j'obtiens

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2} \text{ Et } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}$$

Solution 13 –

AU BROUILLON

Je commence par représenter la situation par un arbre pondéré.



Je souhaite calculer la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire, c'est-à-dire de l'évènement N_3 . Je dois donc faire la somme des probabilités de chacune des branches menant à l'évènement N_3 .

SUR LA COPIE

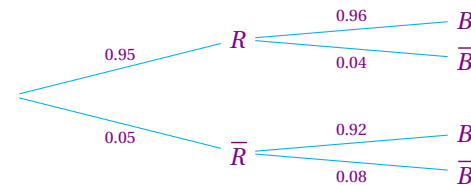
Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, je note N_k l'évènement « la k -ième boule tirée est noire » et B_k l'évènement « la k -ième boule tirée est blanche ».

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(N_3) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \\ &\quad + P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) \times P_{N_1 \cap B_2}(N_3) \\ &\quad + P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) \times P_{B_1 \cap N_2}(N_3) \\ &\quad + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) \\ &= \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{0}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} \\ &\quad + \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} \\ &= \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{7}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

La troisième boule est noire avec probabilité $\frac{1}{5}$.

Solution 14 – Je réalise un arbre pondéré au brouillon pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,

$$P(\bar{R}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad P_{\bar{R}}(\bar{B}) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \quad P_R(\bar{B}) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25},$$

$$P(R) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}, \quad P_{\bar{R}}(B) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25} \text{ Et } P_R(B) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

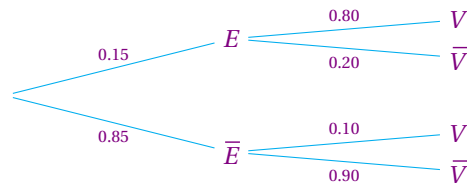
2. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{R, \bar{R}\}$ forme un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(R) \times P_R(B) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B) \\
 &= \frac{19}{20} \times \frac{24}{25} + \frac{1}{20} \times \frac{23}{25} \\
 &= \frac{456}{500} + \frac{23}{500} \\
 &= \frac{479}{500} = 0.958
 \end{aligned}$$

☞ Somme de chacune des branches menant à B.

Donc 95.8% des bouteilles ont un bouchon.

Solution 15 – Je réalise un arbre pondéré au brouillon pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned}
 P(E) &= \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, & P_E(V) &= \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, & P_{\bar{E}}(V) &= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \\
 P(\bar{E}) &= 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}, & P_E(\bar{V}) &= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} & \text{Et } P_{\bar{E}}(\bar{V}) &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.
 \end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{E, \bar{E}\}$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
 P(V) &= P(E) \times P_E(V) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(V) & \text{☞ Somme de chacune des branches menant à V.} \\
 &= \frac{3}{20} \times \frac{4}{5} + \frac{17}{20} \times \frac{1}{10} \\
 &= \frac{12}{100} + \frac{17}{200} \\
 &= \frac{41}{200} = 0.205
 \end{aligned}$$

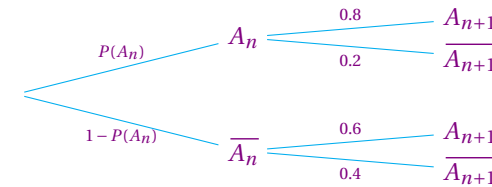
Donc 20.5% des sacs contiennent des pommes de variétés différentes.

3. Je cherche $P_V(\bar{E})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_V(\bar{E}) = \frac{P(V \cap \bar{E})}{P(V)} = \frac{17}{200} \times \frac{200}{41} = \frac{17}{41}.$$

Le sac a été acheté en supermarché avec probabilité $\frac{17}{41}$.

Solution 16 – Je réalise un arbre pondéré au brouillon pour modéliser la situation.



1. (a) D'après l'énoncé,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0.8 \text{ Et } P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = 0.6.$$

(b) D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \geq 1$, $\{A_n, \bar{A}_n\}$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
 P_{A_n}(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A}_n) \times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) & \text{☞ Somme des branches menant à l'évènement } A_{n+1}. \\
 &= P(A_n) \times 0.8 + (1 - P(A_n)) \times 0.6 & \text{☞ Je pense aux parenthèses autour de } (1 - P(A_n)) \text{ et développe.} \\
 &= 0.8P(A_n) + 0.6 - 0.6P(A_n) & \text{☞ Je simplifie.} \\
 &= 0.2P(A_n) + 0.6
 \end{aligned}$$

2. (a) J'applique la Méthode vue dans le Chapitre 4.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - 0.75 & \text{☞ J'utilise la définition de } u_n = p_n - 0.75. \\
 &= 0.2p_n + 0.6 - 0.75 & \text{☞ J'utilise la relation établie à la question 1.(b).} \\
 &= 0.2(u_n + 0.75) - 0.15 & \text{☞ Puisque } u_n = p_n - 0.75, \text{ alors } p_n = u_n + 0.75. \\
 &= 0.2u_n + 0.15 - 0.15 & \text{☞ Je termine les calculs et simplifie.} \\
 &= 0.2u_n
 \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc bien une suite géométrique de raison 0.2.

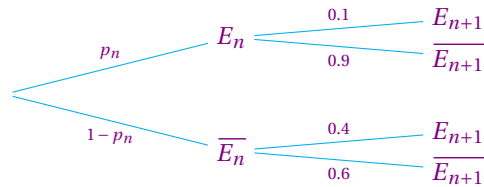
(b) Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison 0.2 et que son premier terme vaut $u_1 = p_1 - 0.75 = 0.7 - 0.75 = -0.05$, alors pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.05 \times (0.2)^{n-1}.$$

Et donc pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = u_n + 0.75 = 0.75 - 0.05 \times (0.2)^{n-1}.$$

Solution 17 – Je réalise un arbre pondéré au brouillon pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,

$$P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{10} \text{ Et } P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \geq 1$, $\{E_n, \overline{E_n}\}$ forme un système complet d'évènements,

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \quad \text{⚡ Somme des branches menant à l'évènement } E_{n+1}.$$

$$\iff p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{10} + (1-p_n) \times \frac{4}{10} \quad \text{⚡ Je pense aux parenthèses autour de } (1-p_n) \text{ et développe.}$$

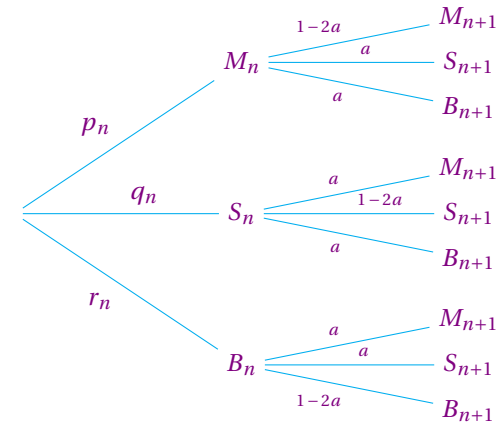
$$= \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10} - \frac{4}{10}p_n \quad \text{⚡ Je simplifie.}$$

$$= \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n$$

3. La suite $(p_n)_{n \geq 1}$ satisfait la même relation de récurrence que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ étudiée dans la Partie A. Par ailleurs, $p_1 = \frac{1}{2} = u_1$, donc pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = u_n = \frac{4}{13} + \frac{5}{26} \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

Solution 18 – Je réalise un arbre pondéré au brouillon pour modéliser la situation.



1. D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \geq 1$, $\{M_n, S_n, B_n\}$ forme un système complet d'évènements,

$$P(M_{n+1}) = P(M_n) \times P_{M_n}(M_{n+1}) + P(S_n) \times P_{S_n}(M_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(M_{n+1})$$

$$\iff p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n.$$

De même,

$$P(S_{n+1}) = P(M_n) \times P_{M_n}(S_{n+1}) + P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(S_{n+1})$$

$$\iff q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n.$$

2. Comme pour tout $n \geq 1$, $\{M_n, S_n, B_n\}$ forme un système complet d'évènements, alors $P(M_n) + P(S_n) + P(B_n) = P(\Omega) = 1$, i.e. $p_n + q_n + r_n = 1$. Donc

$$r_n = 1 - (p_n + q_n).$$

3. Soit $n \geq 1$.

$$p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \quad \text{⚡ J'utilise la relation établie à la question 1.}$$

$$= (1-2a)p_n + aq_n + a(1-p_n-q_n) \quad \text{⚡ J'utilise la relation établie à la question 2.}$$

$$= (1-2a)p_n + aq_n + a - ap_n - aq_n \quad \text{⚡ Je développe le dernier terme.}$$

$$= (1-2a-a)p_n + (a-a)q_n + a \quad \text{⚡ Je factorise par } p_n \text{ et par } q_n \text{ et simplifie.}$$

$$= (1-3a)p_n + a$$

Je procède de même pour q_{n+1} :

$$q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n$$

$$= ap_n + (1-2a)q_n + a(1-p_n-q_n)$$

$$= ap_n + (1-2a)q_n + a - ap_n - aq_n$$

$$= (1-3a)q_n + a$$

Les deux suites $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ sont des suites arithmético-géométriques. Elles partagent même la même relation de récurrence.

4. (a) J'applique la Méthode vue dans le Chapitre 4.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{3} && \text{J'utilise la définition de } u_n = p_n - \frac{1}{3}. \\
 &= (1-3a)p_n + a - \frac{1}{3} && \text{J'utilise la relation établie à la question 3.} \\
 &= (1-3a)\left(u_n + \frac{1}{3}\right) + a - \frac{1}{3} && \text{Puisque } u_n = p_n - \frac{1}{3}, \text{ alors } p_n = u_n + \frac{1}{3}. \\
 &= (1-3a)u_n + \frac{1}{3} - \cancel{a} \times \frac{1}{3} + a - \frac{1}{3} && \text{Je développe, en gardant } (1-3a) \text{ en facteur.} \\
 &= (1-3a)u_n + \frac{1}{3} - a + a - \frac{1}{3} && \text{Je simplifie.} \\
 &= (1-3a)u_n
 \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $(1-3a)$. Enfin, puisque le titre est stable le premier jour, $p_0 = r_0 = 0$ et $q_0 = 1$. Ainsi $u_0 = p_0 - \frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$.

(b) Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $(1-3a)$ et de premier terme $u_1 = -\frac{1}{3}$, alors pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{3} \times (1-3a)^{n-1}.$$

Et donc, pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (1-3a)^{n-1} = \frac{1}{3}(1 - (1-3a)^{n-1}).$$

De la même manière, comme les suites $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ vérifient la même relation de récurrence, alors la suite $\left(q_n - \frac{1}{3}\right)_{n \geq 1}$ est aussi géométrique de raison $(1-3a)$ mais de premier terme $q_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (1-3a)^{n-1} = \frac{1}{3}(1 + 2(1-3a)^{n-1}).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 r_n &= 1 - p_n - q_n && \text{J'utilise la relation de la question 2.} \\
 &= 1 - \frac{1}{3}(1 - (1-3a)^{n-1}) - \frac{1}{3}(1 + 2(1-3a)^{n-1}) && \text{Je remplace } p_n, q_n. \\
 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1-3a)^{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(1-3a)^{n-1} && \text{Je développe.} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^{n-1} && \text{Je rassemble les termes.} \\
 &= \frac{1}{3}(1 - (1-3a)^{n-1}) && \text{Je factorise par } \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Solution 19 –

1. (a) Posons $a = 1, b = 1, c = 1$ et $d = -1$. Alors, $ad - bc = -1 - 1 = -2 \neq 0$. Donc, P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $P^{-1}AP = C$.

2. (a) On a :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + A$$

De même,

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + C$$

(b) On a vu que $P^{-1}AP = C$. Par ailleurs, $B = I_2 + A$ et $D = I_2 + C$. Ainsi,

$$P^{-1}BP = P^{-1}(I_2 + A)P = P^{-1}I_2P + P^{-1}AP = I_2 + C = D$$

Donc, on a bien $P^{-1}BP = D$.

3. (a) Notons \mathcal{P}_n la propriété $P^{-1}B^nP = D^n$.

Initialisation : ($n = 0$)

$P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$ et $D^0 = I_2$. Ainsi, \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathcal{P}_n vraie et on veut montrer que \mathcal{P}_{n+1} est vraie aussi.

Autrement dit, on suppose que $P^{-1}B^nP = D^n$ et on veut montrer que $P^{-1}B^{n+1}P = D^{n+1}$.

On a :

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D \times D^n \\ &= P^{-1}BP \times P^{-1}B^nP \\ &= P^{-1}BI_2B^nP \\ &= P^{-1}BB^nP \\ &= P^{-1}B^{n+1}P \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété \mathcal{P} est héréditaire.

Conclusion : \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}B^nP = D^n$$

(b) La marice D étant diagonale, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) On sait que $P^{-1}B^nP = D^n$ donc en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient $B^n = PD^nP^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat demandé.

4. (a) Puisqu'Adrien a le service lors du premier échange, et d'après les informations données dans l'énoncé, on a :

$$a_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{1}{3}$$

Par ailleurs, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_2 &= P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

(b) D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$$

(c) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{aligned}$$

(d) En utilisant la question précédente, on obtient :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \\ \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} B X_n$$

(e) Notons \mathcal{P}_n la propriété $X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$.

Initialisation : ($n = 1$)

On a $\frac{1}{3^{1-1}} B^{1-1} X_1 = 1 \times I_2 \times X_1 = X_1$. Ainsi, \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose \mathcal{P}_n vraie et on veut montrer que \mathcal{P}_{n+1} est vraie aussi.

Autrement dit, on suppose que $X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$ et on veut montrer que $X_{n+1} =$

$$\frac{1}{3^n} B^n X_1.$$

D'après la question 4(d), on a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{3} B X_n \\ &= \frac{1}{3} B \times \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}} \times B \times B^{n-1} X_1 \\ &= \frac{1}{3^n} B^n X_1 \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$$

(f) On a :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$$

$$= \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} + 1 & 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 & 3^{n-1} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \times 3^{n-1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 3^{n-1} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \times 3^{n-1} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 3^{n-1} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} + \frac{1}{3} \\ 3^{n-1} - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{3} \\ \frac{3^n - 1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n} \\ \frac{3^n - 1}{2 \times 3^n} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $a_n = \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$ et $b_n = \frac{3^n - 1}{2 \times 3^n}$.

Remarque : On pouvait également trouver b_n à partir de a_n en utilisant le fait que $b_n = 1 - a_n$.

Solution 20 –

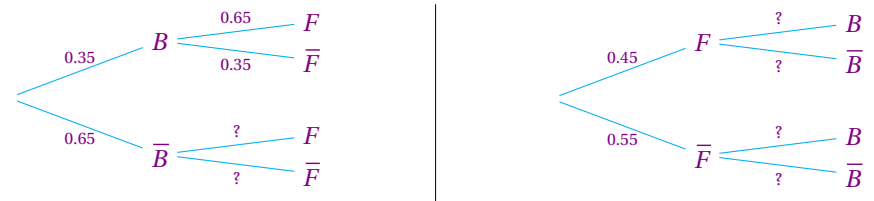
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\} \text{ Et } A \cap B = \{6\}.$$

Donc

$$P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ Et } P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Comme $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, les évènements A et B sont indépendants.

Solution 21 – Je réalise un arbre pondéré au brouillon pour modéliser la situation. Je note F l'évènement « être fumeur » et B l'évènement « avoir une bronchite ». Au vu des informations données dans l'énoncé, je peux réaliser deux arbres différents :



Pour chaque arbre, (au moins) une des informations données dans l'énoncé n'est pas utilisée. Sur le premier arbre, je n'ai pas utilisé le fait que $P(F) = \frac{45}{100}$. Sur le deuxième arbre, je n'ai ni utilisé le fait que $P(B) = \frac{35}{100}$, ni que $P_B(F) = \frac{65}{100}$. Le premier arbre est sans aucun doute le plus utile pour résoudre l'exercice, puisque c'est celui qui comporte le moins d'inconnues (et qui par ailleurs utilise le plus de données de l'énoncé).

1. J'exprime les évènements dont je dois calculer les probabilités en fonction de B et de F :

$$E_1 = B \cap F, \quad E_2 = B \cap \bar{F} \text{ Et } E_3 = \bar{B} \cap \bar{F}.$$

Alors, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(E_1) = P(B \cap F) = P(B) \times P_B(F) = \frac{35}{100} \times \frac{65}{100} = \frac{7}{20} \times \frac{13}{20} = \frac{91}{400},$$

$$P(E_2) = P(B \cap \bar{F}) = P(B) \times P_B(\bar{F}) = \frac{35}{100} \times \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \times \frac{7}{20} = \frac{49}{400}.$$

Par ailleurs, je sais que $P(F) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$, donc $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = \frac{11}{20}$. Et d'après la formule des probabilités totales, comme $\{B, \bar{B}\}$ forme un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} P(\bar{F}) &= P(B \cap \bar{F}) + P(\bar{B} \cap \bar{F}) \iff \frac{11}{20} = \frac{91}{400} + P(\bar{B} \cap \bar{F}) \\ &\iff P(\bar{B} \cap \bar{F}) = \frac{11}{20} - \frac{91}{400} = \frac{220}{400} - \frac{91}{400} = \frac{129}{400}. \end{aligned}$$

Autrement dit

$$P(E_3) = P(\bar{B} \cap \bar{F}) = \frac{129}{400}.$$

2. Je compare $P(B) \times P(F)$ et $P(B \cap F)$.

$$P(B) \times P(F) = \frac{7}{20} \times \frac{9}{20} = \frac{63}{400} \text{ Et } P(B \cap F) = P(E_1) = \frac{91}{400},$$

donc les évènements F et B ne sont pas indépendants.

3. Je cherche $P_F(B)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_F(B) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{91}{400} \times \frac{20}{9} = \frac{91}{20 \times 9} = \frac{91}{180}.$$

Ce fumeur a une bronchite avec probabilité $\frac{91}{180}$.

Solution 22 – J'exprime les évènements dont je dois calculer les probabilités en fonction de A et de B :

$$E_1 = A \cap B, \quad E_2 = A \cup B, \quad E_3 = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \text{ Et } E_4 = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Puisque les évènements A et B sont indépendants,

$$P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

Par ailleurs,

$$P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Aussi, puisque A et B sont indépendants, A et \bar{B} , et \bar{A} et B sont également indépendants. Dès lors

$$P(E_3) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{7}{20}.$$

Enfin

$$P(E_4) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Solution 23 – Je note A l'évènement « atteindre la cible située à 20m » et B l'évènement « atteindre la cible située à 50m ». La probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20m est

$$\begin{aligned} & P(A \cap B \cap (A \cup \bar{A})) + P(\bar{A} \cap B \cap A) \\ &= P(A) \times P(B) \times 1 + P(\bar{A}) \times P(B) \times P(A) \quad \text{Les évènements sont indépendants.} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

De même, la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 50m est

$$P(B \cap A \cap (B \cup \bar{B})) + P(\bar{B} \cap A \cap B) = \frac{1}{12} \times \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{48}.$$

Comme $\frac{7}{48} > \frac{5}{36}$, l'archer a tout intérêt à commencer par la cible située à 50m.

Solution 24 – 1. (a) $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (a, a); (b, b); (a, b, a, a); (b, a, a, a); (b, a, b, b); (a, b, b, b); \\ (a, b, b, a, d); (b, a, a, b, d); (a, b, a, b, d); (b, a, b, a, d) \end{array} \right\}$.

$$E_A = \{(a, a); (a, b, a, a); (b, a, a, a)\}.$$

$$E_B = \{(b, b); (b, a, b, b); (a, b, b, b)\}.$$

$$D = \{(a, b, b, a, d); (b, a, a, b, d); (a, b, a, b, d); (b, a, b, a, d)\}.$$

$$V_{A,0} = \{(a, a)\}.$$

$$V_{A,1} = \{(a, b, a, a); (b, a, a, a)\}.$$

$$V_{B,0} = \{(b, b)\}.$$

$$V_{B,1} = \{(b, a, b, b); (a, b, b, b)\}.$$

$$N_0 = \Omega.$$

$$N_1 = \Omega \setminus \{(a, a); (b, b)\}.$$

$$N_2 = D.$$

(b) Détaillons le calcul de la probabilité de l'un des évènements élémentaires, par exemple (a, b, a, a) .

Pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on note

$A_i =$ « Le i -ème jeu est joué et gagné par A ».

$B_i =$ « Le i -ème jeu est joué et gagné par B ».

Alors $\{(a, b, a, a)\} = A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap A_4$. Si p est strictement compris entre 0 et 1, cet évènement est de probabilité non-nulle. Donc, d'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(\{(a, b, a, a)\}) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) \times P_{A_1 \cap B_2}(A_3) \times P_{A_1 \cap B_2 \cap A_3}(A_4).$$

D'après l'énoncé, on a $P(A_1) = p$ et $P_{A_1}(B_2) = q$.

$P_{A_1 \cap B_2}(A_3)$ est également p , car si l'on sait que l'évènement $A_1 \cap B_2$ est réalisé, alors le 3-ième jeu sera disputé, et $P_{A_1 \cap B_2}(A_3)$ est donc simplement la probabilité que A le remporte, c'est-à-dire p .

De même, $P_{A_1 \cap B_2 \cap A_3}(A_4) = p$.

Finalement, on a donc $P(\{(a, b, a, a)\}) = pqpp = p^3q$.

De cette façon, on peut calculer des probabilités de chacun des évènements élémentaires :

$$P(\{(a, a)\}) = p^2 \quad P(\{(b, b)\}) = q^2, \quad P(\{(a, b, a, a)\}) = p^3q$$

$$P(\{(b, a, a, a)\}) = p^3q, \quad P(\{(b, a, b, b)\}) = pq^3, \quad P(\{(a, b, b, b)\}) = pq^3$$

$$P(\{(a, b, b, a, d)\}) = P(\{(b, a, b, a, d)\}) = p^2q^2$$

$$P(\{(a, b, a, b, d)\}) = P(\{(b, a, a, b, d)\}) = p^2q^2.$$

Grâce à la question a, on peut alors calculer :

$$P(\Omega) = 1, \quad P(E_A) = p^2 + 2p^3q, \quad P(E_B) = q^2 + 2pq^3 \quad P(D) = 4p^2q^2.$$

$$P(V_{A,0}) = p^2, \quad P(V_{A,1}) = 2p^3q, \quad P(V_{B,0}) = q^2, \quad P(V_{B,1}) = 2pq^3.$$

$$P(N_0) = 1, \quad P(N_1) = 1 - p^2 - q^2, \quad P(D) = 4p^2q^2.$$

2. (a) Si une partie ne va pas au jeu décisif, le perdant a remporté x jeux et le gagnant $x + 2$, soit au total $2x + 2 = 2(x + 1)$, qui est pair.
 (b) N_k est l'évènement « Il y a $k - k$ après les $2k$ premiers jeux ». En effet, si les deux joueurs n'ont pas gagné le même nombre de jeux après $2k$ -jeux, alors il y a au moins deux jeux d'écart entre les deux et l'un d'eux a déjà gagné. En effet, s'il n'y avait qu'un jeu d'écart entre eux, la somme des deux serait impaire, ce qui est contradictoire.

Ainsi, si N_k est réalisé, $V_{A,k}$ est réalisé si et seulement si A gagne les deux jeux suivants. Donc $V_{A,k} = N_k \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2}$, et d'après la formule des probabilités composées, on a

$$P(V_{A,k}) = P(N_k)P_{N_k}(A_{2k+1})P_{N_k \cap A_{2k+1}}(A_{2k+2}) = P(N_k) \times p^2.$$

De même, on a $P(V_{B,k}) = P(N_k) \times q^2$.

- (c) $P(N_0) = P(\Omega) = 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on a $N_{k+1} = (N_k \cap A_{2k+1} \cap B_{2k+2}) \cup (N_k \cap B_{2k+1} \cap A_{2k+2})$.

A_{2k+1} et B_{2k+1} sont incompatibles, donc $N_k \cap A_{2k+1} \cap B_{2k+2}$ et $N_k \cap B_{2k+1} \cap A_{2k+2}$ sont incompatibles. Alors

$$\begin{aligned} P(N_{k+1}) &= P(N_k \cap A_{2k+1} \cap B_{2k+2}) + P(N_k \cap B_{2k+1} \cap A_{2k+2}) \\ &= P(N_k) \times P_{N_k}(A_{2k+1}) \times P_{N_k \cap A_{2k+1}}(B_{2k+2}) \\ &\quad + P(N_k) \times P_{N_k}(B_{2k+1}) \times P_{N_k \cap B_{2k+1}}(A_{2k+2}) \\ &= P(N_k)pq + P(N_k)qp \\ &= 2pqP(N_k) \end{aligned}$$

Donc $(P(N_k))$ est une suite géométrique de raison $2pq$, d'où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P(N_k) = (2pq)^k$.

- (d) On a les unions disjointes suivantes :

$$E_A = \bigcup_{k=0}^{n-1} V_{A,k}, \quad E_B = \bigcup_{k=0}^{n-1} V_{B,k}.$$

On a donc

$$P(E_A) = \sum_{k=0}^{n-1} P(V_{A,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N_k)p^2 = p^2 \sum_{k=0}^{n-1} (2pq)^k.$$

Pour tout $p \in]0, 1[$, on a $2p(1 - p) = 1 \iff 0 = 1 - 2p + 2p^2$. Or, le discriminant de $1 - 2X + 2X^2$ est -4 , donc ce polynôme n'a pas de racine réelle.

Donc $2pq \neq 1$ et

$$P(E_A) = p^2 \frac{1 - (2pq)^n}{1 - 2pq}.$$

De même, on a

$$P(E_B) = q^2 \frac{1 - (2pq)^n}{1 - 2pq}.$$

Enfin, D se réalise lorsque personne n'a gagné après $2n$ jeux, donc $D = N_n$ et on a

$$P(D) = (2pq)^n.$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!