Exercices — Chapitre 25

Exercice 1 (♥) – Huit chevaux, numérotés de 1 à 8, s'affrontent dans une course hippique. Un pari consiste à donner l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux, par exemple $(3,5,2)$. On gagne le tiercé lorsque l'on donne les bons chevaux du trio de tête dans le bon ordre d'arrivée et on gagne le tiercé dans le désordre lorsque l'on donne le bon trio de tête mais pas dans l'ordre d'arrivée. Dans les autres cas, on ne gagne rien.

1. Combien y a-t-il de paris possibles ?
2. On vient de faire notre pari. Combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles pour les 8 chevaux, où l'on gagne quelque chose ?
3. Quel est le nombre minimum de paris qu'il faut faire pour être sûr de gagner quelque chose ?

Exercice 2 (♣) – Dénombrer les nombres de 4 chiffres contenant uniquement des $1, 2$ et 3.

Exercice 3 (♥) – Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et p un entier compris entre 0 et n. Combien y a-t-il de mots de n lettres contenant p fois la lettre a et $(n-p)$ fois la lettre b ?

Exercice 4 (♥) – Combien existe-t-il d'anagrammes des noms suivants :(sans se préoccuper qu'elles aient ou non un sens, l'oubli de la majuscule est volontaire)

1. « hilbert » ? **2.** « russel » ? **3.** « ramanujan » ?

Question subsidiaire : quel est le prénom de chacun d'eux ?
Question subsidiaire 2 : ont-ils vécu à la même époque ?
Question subsidiaire 3 : pourquoi sont-ils connus ?

Exercice 5 (♥) – On extrait simultanément 13 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains de 13 cartes possibles ?
2. Combien y en a-t-il contenant l'as de pique ?
3. Combien y en a-t-il ne contenant aucun as ?
4. Combien y en a-t-il contenant au moins un as ? Au moins deux as ?
5. Combien y a-t-il de mains formées de cinq piques, quatre cœurs, un carreau et trois trèfles ?
6. Combien y a-t-il de mains de 13 cartes bicolores ?
7. Combien y a-t-il de mains contenant un seul as et cinq piques ?

Exercice 6 (♠) – Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 7 (♠) – Dénombrer les couples (A, B) de parties d'un ensemble E à n éléments tels que $A \cap B = \varnothing$.

Indication : Raisonner par élément de E. Où peut-il être lorsque l'on construit les couples (A, B) ?

Exercice 8 (♠) – Soit A un ensemble fini de cardinal n et B une partie de A de cardinal p. Dénombrer les parties X de A vérifiant $B \subset X \subset A$.

Indication : Raisonner par élément de E. Où peut-il être lorsque l'on construit X ?

Exercice 9 (♥) – Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue un tirage de p boules.

1. Dans cette question, les p boules sont extraites <u>simultanément</u>.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leqslant k \leqslant n$. Déterminez le nombre de tirages tels que le plus grand numéro tiré est k.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.
2. Dans cette question, les tirages sont <u>successifs et sans remise</u>.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule numérotée 1 ?
3. Dans cette question, les tirages sont <u>successifs et avec remise</u>.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins deux fois le même numéro ?
   (d) Combien y a-t-il de tirages où exactement 2 numéros sont apparus ?

Exercice 10 (♥) –

1. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres où 0 figure une seule fois ?
2. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?
3. Combien y a-t-il de listes formant une suite de 5 chiffres strictement croissante ?
4. Une liste palindrome est une liste qui se lit de la même façon à l'endroit ou à l'envers, comme 12321 ou 052250. Combien y a-t-il de listes palindromes à 15 chiffres ?

Exercice 11 (♠) –

1. Soit E et F deux ensembles finis et $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,E)$. Montrer que si u et v sont injectives alors u et v sont bijectives.
2. Plus généralement, soit E_1,...,E_n des ensembles finis. Soit $u_1,\dots,u_n$ des applications injectives telles que pour $i \in [\![1,n-1]\!]$, $u_i \in \mathcal{F}(E_i,E_{i+1})$ et $u_n \in \mathcal{F}(E_n,E_1)$. Montrer que les applications $u_1,\dots,u_n$ sont bijectives.

Indication : Que peut-on dire des cardinaux des ensembles en présence ?

Exercice 12 (♠) – Pour tout entier n strictement positif, on note M_n le nombre de façons de monter un escalier de n marches sachant qu'à chaque pas on peut franchir une ou deux marches.

1. Calculer M_1, M_2 et M_3.
2. Montrer en considérant le dernier pas, que
$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$$
3. En déduire la valeur de M_n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 13 (♥) – On dispose dix jetons portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec ?
2. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire où B, A, C apparaissent dans ce ordre et côte à côte ?

Exercice 14 (♠) – Pour tous $n,p \in \mathbb{N}^*$, on note K_n^p l'ensemble des p−uplets croissants formés avec des éléments de $[\![1,n]\!]$. On cherche à calculer le cardinal k_n^p de K_n^p.

Méthode 1 : Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ et on note S_n^p l'ensemble des p−uplets strictement croissants formés avec des éléments de $[\![2,n+p]\!]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K_n^p & \longrightarrow & S_n^p \\ (a_1,a_2,\dots,a_p) & \longmapsto & (a_1+1,a_2+2,\dots,a_p+p). \end{array}$$

1. Vérifier que φ est correctement définie, autrement dit l'image par φ de tout élément de K_n^p appartient bien à S_n^p.
2. Montrer que φ est une bijection.
3. Déterminer le cardinal de S_n^p et en déduire celui de K_n^p.

Méthode 2 :

1. Calculer k_n^1 et k_1^p pour tous entiers n et p strictement positifs.
2. Montrer que pour tous entiers $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$:
$$k_n^p = k_n^{p-1} + k_{n-1}^p.$$
3. En déduire que pour tous entiers n et p strictement positifs, $k_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

Exercice 15 (♥) – On considère trois entiers naturels n, p et q, l'entier n étant inférieur ou égal aux deux autres. Démontrer l'identité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k}$$

d'une part par un raisonnement combinatoire, d'autre part en utilisant le polynôme $(1+X)^p \cdot (1+X)^q$.

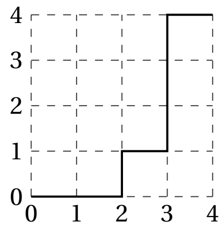
Indication : **Méthode combinatoire :** Dénombrer les parties de $[\![1,p+q]\!]$, en distinguant les cas selon le nombre d'éléments dans $[\![1,p]\!]$ et dans $[\![p+1,q]\!]$.
Méthode polynômiale : Binôme de Newton go BRRRRRR.

Exercice 16 (♠) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note S_n^p le nombre de n-uplets $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = p$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, déterminer S_n^0, S_n^1, S_n^2, S_1^p et S_2^p.
2. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,
$$S_{n+1}^p = S_n^0 + S_n^1 + \dots + S_n^p.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,
$$S_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Exercice 17 (♠) – On se place dans le plan muni du quadrillage $\mathbb{N}^2$. On ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0,0)$ au point $(2,2)$?
2. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0,0)$ au point $(4,4)$?
3. Parmi ces chemins, combien y en a-t-il passant par le point $(1,2)$?



Exercice 18 (♥) – Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans E.
2. Déterminer le nombre d'applications de E dans E qui ne sont pas surjectives.
3. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0,1\}$.
4. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0,1,2\}$.

Exercice 19 (♥) – Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$

Exercice 20 (♥) – Soit n, p deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$. Le but de l'exercice est de montrer, de trois manières différentes, que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

1. Simplifier le produit des coefficients binominaux et utiliser l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p$.
2. Montrer l'égalité demandée en remarquant que $((1+X)+X)^n = (1+2X)^n$.
3. Montrer l'égalité demandée en dénombrant de deux façons différentes l'ensemble des couples (A,B) de parties d'un ensemble E de cardinal n, vérifiant $\mathrm{Card}(B) = p$ et $A \subset B$.

Quelques vidéos pour se cultiver:
Pour un peu de culture sur les cardinaux infinis :
Deux (deux ?) minutes pour l'hôtel de Hilbert - - El Jj
Sur la route de l'infini - Voyages au pays des maths - Arte

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !