Exercices — Chapitre 25

Solution 1 –

1. Un tiercé est un 3-arrangement de $[\![1,8]\!]$. Il y en a donc $\frac{8!}{5!} = 336$.
2. On gagne si ce sont les 3 chevaux de notre pari qui sont arrivent sur le podium. Or pour 3 chevaux donnés, il y a 3! façons de les ordonner, soit 6 ordres d'arrivée qui nous font gagner quelque chose. Puis, il y a 5! possibilités d'ordre d'arrivée pour les 5 chevaux restants. Soit un total de $3! \times 5!$ ordres d'arrivées où l'on est sur de gagner quelque chose.
3. Pour être sur de gagner quelque chose, il faut jouer un tiercé pour chaque ensemble de 3 chevaux possibles. Ainsi, quelque soit le résultat, le trio de tête nous fera gagner dans l'ordre ou dans le désordre.

   On compte donc le nombre de parties à 3 éléments de $[\![1,8]\!]$. Il y en a $\binom{8}{3} = 56$.

Solution 2 – On peut représenter un tel nombre comme un quadruplet de $[\![1,3]\!]$.
Il y en a donc 3^4, c'est-à-dire 81.

Solution 3 – On étudie les possibilités de construction d'un tel mot. On doit construire un mot de n lettres avec p fois "a" et $n-p$ fois "b".
Une fois que l'on a décidé où sont situées les p lettres "a" dans le mot, les lettres "b" occupent forcément les $n-p$ positions restantes. Il y a donc autant de mots vérifiant la contrainte que de façon de choisir les positions des p lettres parmi n positions possibles.
Cela fait donc $\binom{n}{p}$ mots contenant p lettres "a" et $n-p$ lettres "b".

Solution 4 –

1. « hilbert » comporte 7 lettres distinctes, il y a donc 7! façons de les ordonner.
2. On pourrait être tenté de faire la même chose pour « russel », mais il n'est pas constitué de lettres distinctes.

   Un anagramme de « russel » comporte 6 lettres dont deux "s". Il y a $\binom{6}{2}$ ensembles de positions possibles pour les deux "s". Ensuite, il reste 4 lettres distinctes à repartir aux 4 postions restantes. Il y a 4! possibilités pour cela.

   Soit un total de $\binom{6}{2} \times 4!$ anagrammes.
3. On suit le même schéma. Il y a 9 lettres au total. Comptons le nombre de façons de construire des anagrammes de "ramanujan".

   Il y a $\binom{9}{3}$ façons de placer les 3 "a". Ensuite, il reste 6 positions libres. Il y a $\binom{6}{2}$ façons de placer les "n". Enfin, il y a 4! façons de placer les 4 lettres distinctes restantes.

   Au total il y a donc $\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times 4!$ anagrammes de « ramanujan ».

QS1 David Hilbert, Bertrand Russel, Srinivasa Ramanujan.

QS2 Oui.

QS3 Pour en savoir plus :

- Srinivasa Ramanujan - Mmm! - Mathador
- David Hilbert - Mmm! - Thomaths
- Russell's Paradox - A Ripple in the Foundations of Mathematics - - Up and Atom

Solution 5 –

1. Il y a autant de mains possibles que de façons de choisir 13 cartes parmi les 52 (il n'y a pas d'ordre). Soit $\binom{52}{13}$ mains.
2. Il y a autant de mains possibles que de façons de choisir 12 cartes parmi les 51 cartes qui ne sont pas l'As de Pique, soit $\binom{51}{12}$ mains contenant l'as de pique.
3. Une main ne contenant pas d'as est une main contenant 13 cartes parmi les 48 qui ne sont pas des as (il y a 4 as), soit $\binom{48}{13}$ possibilités.
4. Introduisons quelques notations :

   Soient E l'ensemble des mains de 13 cartes. Pour tout $i \in [\![0,4]\!]$, on pose A_i l'ensemble des mains contenant exactement i As.
   Alors, la famille $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une partition de E.
   Ainsi, l'ensemble des mains contenant au moins un as est $E \setminus A_0$. D'après les questions précédentes,

   $$\mathrm{Card}(E \setminus A_0) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A_0) = \binom{52}{13} - \binom{48}{13}.$$

   Pour obtenir le nombre de mains contenant au moins 2 As, il faut retrancher à cela le nombre de mains à exactement 1 As.
   Dans une telle main, il y a :

- 1 As parmi les 4 du jeu,

- 12 cartes parmi les 48 qui ne sont pas des As, soit $\binom{48}{12}$ possibilités.

Par principe multiplicatif, $\text{Card}(A_1) = 4 \times \binom{48}{12}$.

Il y a donc $\binom{52}{13} - \binom{48}{13} - 4 \times \binom{48}{12}$ mains contenant au moins deux As.

5. Pour former une telle main, il faut :
   - 5 piques parmi les 13 du jeu, soit $\binom{13}{5}$ possibilités,
   - 4 cœurs parmi les 13 du jeu, soit $\binom{13}{4}$ possibilités,
   - 1 carreau parmi les 13 du jeu, soit $\binom{13}{1}$ possibilités,
   - 3 trèfles parmi les 13 du jeu, soit $\binom{13}{3}$ possibilités.

   Par principe multiplicatif, il y a donc $\binom{13}{5} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{1} \times \binom{13}{3}$ mains vérifiant la contrainte.
6. Pour former une main bicolore, il faut :
   - 2 couleurs parmi les 4 du jeu, soit $\binom{4}{2}$ possibilités,
   - 13 cartes parmi les 26 cartes du jeu qui sont de ces deux couleurs, soit $\binom{26}{13}$ possibilités. Cependant, cela comprend aussi 2 mains unicolores (une de chacune des couleurs choisies) qu'il faut décompter. Soit $\binom{26}{13} - 2$ mains strictement bicolores des 2 couleurs choisies.

   Au total, il y a donc $\binom{4}{2}\left(\binom{26}{13} - 2\right)$ mains bicolores.
7. Il y a deux types de mains contenant exactement un as et cinq piques :
   (a) Les mains contenant l'as de pique et 4 autres piques. Dans une telle main, il y a l'as de pique, 4 autres piques, soit $\binom{12}{4}$ possibilités, et 8 cartes qui ne sont pas des piques ni des as, soit $\binom{36}{8}$ possibilités.
   (b) Les mains contenant un as qui n'est pas l'as de pique. Dans une telle main, il y a un as autre que l'as de pique, soit 3 possibilités, ainsi que 5 piques parmi les 12 du jeu qui ne sont pas l'as, soit $\binom{12}{5}$ possibilités et enfin 7 cartes qui ne sont pas des piques ni des as, soit $\binom{36}{7}$ possibilités.

   Comme ces deux situations sont mutuellement exclusives et décrivent toutes les possibilités, on en déduit par principe de partition que le nombre de mains contenant exactement 1 As et 5 piques est

$$\binom{12}{4} \times \binom{36}{8} + 3 \times \binom{12}{5} \times \binom{36}{7}.$$

Solution 6 – Construisons f une surjection de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Les $n+1$ éléments de l'ensemble de départ ont donc n images distinctes, ce qui signifie qu'ils ont tous des images distinctes sauf exactement deux qui ont la même image.
Il y a $\binom{n+1}{2}$ possibilités pour la paire d'éléments a et b de $[\![1, n+1]\!]$ ayant la même image par f.
Il y a n possibilités pour l'image de ces deux éléments.
$\widetilde{f} : [\![1, n+1]\!] \setminus \{a, b\} \to [\![1, n]\!] \setminus \{f(a)\}$ est une bijection. Il y a $(n-1)!$ telles bijections différentes (nombre de bijections entre des ensembles de cardinal $n-1$).
Au total, il y a donc $\binom{n+1}{2} n(n-1)! = \binom{n+1}{2} n!$ surjections de $[[1, n+1]]$ dans $[[1, n]]$.

Solution 7 – Dénombrons les façons de construire un tel couple.
Pour chaque élément de E, il est soit dans A, soit dans B, soit dans aucun des deux. Il ne peut pas être dans A et B puisque leur intersection est vide. Cela fait donc 3 choix par élément de E, soit par principe multiplicatif, 3^n couples (A, B) au total.

Solution 8 – Soit x un élément de E.

- Si $x \in B$, il est dans toute partie X vérifiant $B \subset X \subset A$.
- Si $x \in B$, il n'est dans aucune partie X vérifiant $B \subset X \subset A$.
- Si $x \in B \setminus A$, il peut être ou ne pas être dans une partie X vérifiant $B \subset X \subset A$.

Ainsi, pour construire un X tel que précisé par l'énoncé, on a deux possibilités pour chaque élément de $A \setminus B$, qui est de cardinal $n - p$, soit, par principe multiplicatif, 2^{n-p} possibilités.

Solution 9 –

1. (a) Il s'agit simplement du nombre de façons de tirer p numéro parmi n possibles (Pas d'ordre, éléments distincts), soit $\binom{n}{p}$.
   (b) Un tirage dont le plus grand numéro est k contient k et $p-1$ autres numéros strictement inférieurs à k, c'est à dire dans $[\![1, k-1]\!]$. Il y a donc $\binom{k-1}{p-1}$ tels tirages.
   (c) Lors d'un tirage de p boules distinctes le plus grand numéro obtenu est forcément entre p et n. Donc en notant, pour tout $i \in [\![p, n]\!]$, E_i l'ensemble des tirages dont le plus grand numéro est i et E l'ensemble des tirages, on a :
   $E_p \cup \cdots \cup E_n = E, \qquad \forall i, j \in [\![p, n]\!], E_i \cap E_j = \varnothing$. Donc, par principe de partition, on a
   $$\mathrm{Card}(E) = \sum_{i=p}^{n} \mathrm{Card}(E_i),$$
   $$\binom{n}{p} = \sum_{i=p}^{n} \binom{p-1}{i-1}.$$
2. (a) On choisit p boules parmi n avec ordre (et les numéros sont distincts puisque le tirage est sans remise) : Il y en a donc autant que de p-arrangements d'éléments de $[\![1, n]\!]$, soit $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
   (b) Un tirage commence par 1 si on a d'abord tiré "1" puis $p-1$ autres boules quelconques. Il y a autant de façons de faire un tel tirage que de $p-1$-arrangements de $[\![2, n]\!]$, soit $\dfrac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-p)!}$.
3. (a) Ici, on tire p éléments, pas forcément distincts, avec ordre. Il y a autant de tirages que de p-listes d'éléments de $[\![1, n]\!]$, soit n^p tirages.
   (b) Notons T l'ensemble de tous les tirages,
   P l'ensemble des tirages dont le premier numéro est strictement plus petit que le dernier,
   D l'ensemble des tirages dont le dernier numéro est strictement plus petit que le premier,
   E l'ensemble des tirages dont le premier numéro et le dernier sont égaux.
   Ces trois ensembles D, E, P réalisent une partition de l'ensemble des tirages T. D'où
   $$\mathrm{Card}(D) + \mathrm{Card}(P) + \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(T).$$
   De plus, par symétrie du problème, $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(D)$. Donc
   $$\mathrm{Card}(D) = \frac{1}{2}(\mathrm{Card}(T) - \mathrm{Card}(E)).$$
   Nous allons plutôt dénombrer les tirages ayant les mêmes premiers et derniers numéros.
   Il y a n^{p-1} tirages ayant les mêmes premiers et derniers numéros (On a le choix des $p-1$ premiers numéros, mais le dernier est fixé par le premier).
   Donc $\mathrm{Card}(D) = \frac{1}{2}(n^p - n^{p-1}) = n^{p-1}\frac{n-1}{2}$.
   (c) Le nombre de tirages contenant uniquement des numéros différents est celui obtenu dans la question 2)a), soit $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. Donc le nombre de tirages qui contiennent au moins deux fois le même numéro est $n^p - \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
   (d) Il y a $\binom{n}{2}$ choix possibles pour les 2 numéros qui apparaissent.
   Une fois ces deux nombres choisis, il y a 2^p tirages de p numéros successifs avec remise parmi les deux. Puisque l'on cherche le nombre de tirages contenant exactement 2 numéros, il faut exclure ceux contenant un unique numéro, qui sont au nombre de deux.
   Cela fait un total de $\binom{n}{2}(2^p - 2)$ tirages contenant exactement deux numéros.

Solution 10 –

1. Il y a 5 possibilités pour la position du 0. Pour chacune des autres positions, il y a ensuite 9 possibilités (tous les autres chiffres), soit par principe multiplicatif, 5×9^4 listes de 5 chiffres avec un unique 0.
2. Pour tout $i \in [\![2, 5]\!]$, on note A_i l'ensemble formé des listes où un chiffre et un seul est répété i fois. On note aussi A l'ensemble des listes où un chiffre est répété et un seul.
   (a) Déterminons $\mathrm{Card}(A_2)$.
      i. On choisit le chiffre répété : 10 possibilités.
      ii. On choisit la place des deux chiffres répétés : $\binom{5}{2}$ possibilités.
      iii. On choisit les autres chiffres : $9 \times 8 \times 7$ (on ne peut pas prendre un chiffre déjà choisi)

   Ainsi, $\mathrm{Card}(A_2) = 10 \times \binom{5}{2} \times 9 \times 8 \times 7$.

(b) Déterminons $\mathrm{Card}(A_3)$.

i. Choix du chiffre répété : 10.

ii. Choix de la place des trois chiffres répétés : $\binom{5}{3}$.

iii. Choix des deux autres chiffres : 9×8.

Donc $\mathrm{Card}(A_3) = 10 \times \binom{5}{3} \times 9 \times 8$

(c) De même, on obtient $\mathrm{Card}(A_4) = 10 \times 5 \times 9$ et $\mathrm{Card}(A_5) = 10$.

Au final, puisque $A = A_2 \cup \cdots \cup A_5$ avec union disjointe, on obtient :

$$\mathrm{Card}(A) = 10 \times \binom{5}{2} \times 9 \times 8 \times 7 + 10 \times \binom{5}{3} \times 9 \times 8 + 10 \times 5 \times 9 + 10.$$

3. Une liste strictement croissante contient nécessairement 5 chiffres différents. Or, étant donnés 5 chiffres différents, il existe une unique façon de les ordonner dans l'ordre croissant. Ainsi, il existe autant de listes strictement croissantes de 5 chiffres que de façons de sélectionner 5 chiffres parmi les 10 chiffres possibles, soit $\binom{10}{5}$.

4. Il y autant de listes palindromes à 15 éléments que de façons de choisir les 8 premiers éléments de la liste, puisqu'alors cela détermine entièrement les 7 derniers. La question se ramène donc au nombrement d'une liste à 8 chiffres, soit 10^8 possibilités.

Solution 11 –

1. u est injective donc $\mathrm{Card}(F) \geqslant \mathrm{Card}(E)$ et v est injective donc $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$. On en déduit que $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$. Or pour des applications entre ensembles de même cardinal, injectif est équivalent à bijectif, donc u et v sont bijectives.

2. Par injectivité des u_i, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{Card}(E_i) \leqslant \mathrm{Card}(E_{i+1})$ et $\mathrm{Card}(E_n) \leqslant \mathrm{Card}(E_1)$. On a donc

$$\mathrm{Card}(E_1) \leqslant \mathrm{Card}(E_2) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Card}(E_{n-1}) \leqslant \mathrm{Card}(E_n) \leqslant \mathrm{Card}(E_1).$$

On en déduit que

$$\mathrm{Card}(E_1) = \mathrm{Card}(E_2) = \cdots = \mathrm{Card}(E_{n-1}) = \mathrm{Card}(E_n).$$

Toutes les applications u_i sont des applications injectives entre ensembles de même cardinal, donc sont bijectives.

Solution 12 –

1. $M_1 = 1$.
   Pour deux marches, les séquences possibles sont : $1, 1$ et 2, ce qui donne $M_2 = 2$.
   Pour trois marches, on peut faire $1, 1, 1$ ou bien $1, 2$ ou bien $2, 1$, donc $M_3 = 3$.

2. Soit $n \geqslant 2$. Le dernier pas est soit de une marche soit de deux marches. Faisons une disjonction de cas :
   - Si le dernier pas est de 2 marches, cela signifie qu'avant ce pas on se trouvait sur la $n-2$ ème marche. Il y a alors M_{n-2} façons d'avoir monté les $n-2$ premières marches.
   - Si le dernier pas est de 1 marche, cela signifie qu'avant ce pas on se trouvait sur la $n-1$ ème marche. Il y a alors M_{n-1} façons d'avoir monté les $n-1$ premières marches.

   Par principe de partition, on a donc

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$$

3. C'est une relation de récurrence d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$.

   Son discriminant est $\Delta = 5$, les racines sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, donc il existe α, β réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

   Pour $n = 1$ et 2, on obtient le système

$$\begin{cases} 1 & = \alpha r_1 + \beta r_2 \\ 2 & = \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 \end{cases}.$$

   Après résolution, on trouve que $\alpha = \dfrac{r_2}{r_2 - r_1}$ et $\beta = \dfrac{-r_1}{r_2 - r_1}$.
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

La même chose en images :
Comment monter un escalier - - Mickaël Launay - Micmaths

Solution 13 –

1. Un mot est une permutation des 10 jetons. Il y a donc 10! mots possibles.
2. Pour former un tel mot :
   (a) on choisit la place du B : 8 possibilités (il faut pouvoir mettre A et C derrière)
   (b) les lettres A et C sont alors placés
   (c) on choisit la place des 7 lettres restantes : 7! possibilités

   Il y a donc $8\times 7!$ soit $8!$ mots de 10 lettres où les lettres B, A, C apparaissent dans cet ordre.
   Remarque : on peut aussi les dénombrer en considérant le bloc BAC comme une seule lettre, ce qui mène au même résultat.

Solution 14 – Méthode 1 :

1. Soit $(x_1,\dots,x_p)\in K_n^p$. Alors on sait que
$$\forall i\in[\![1,p]\!],\ 1\leqslant x_i\leqslant n,\qquad \forall i\in[\![1,p-1]\!],\ x_{i+1}\geqslant x_i.$$
   Donc pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $1+i\leqslant x_i+i\leqslant n+i$, et donc $2\leqslant x_i+i\leqslant n+p$.
   De plus, $x_i+i<x_{i+1}+i+1$.
   Donc $\varphi(x_1,\dots,x_p)$ est bien un p-uplet de $[\![2,n+p]\!]$ strictement croissant.
2. Soit $(y_1,\dots,y_p)\in S_n^p$.
   • Montrons par récurrence finie que pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $y_i\geqslant i+1$.
   Initialisation : $y_1\geqslant 2=1+1$ par définition de S_n^p.
   Hérédité : Soit $i\in[\![1,p-1]\!]$, on suppose que $y_i\geqslant i+1$. Alors, comme $y_{i+1}>y_i$, on a $y_{i+1}>i+1$ et donc $y_{i+1}\geqslant i+2$.
   Par récurrence, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $y_i\geqslant i+1$.
   • Montrons par récurrence finie descendante que pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $y_i\leqslant n+i$.
   Initialisation : $y_p\leqslant n+p$ par définition de S_n^p.
   Hérédité : Soit $i\in[\![2,p]\!]$, on suppose que $y_i\leqslant n+i$. Alors, comme $y_{i-1}<y_i$, on a $y_{i-1}<n+i$ et donc $y_{i+1}\leqslant n+i-1$.
   Par récurrence descendante, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $y_i\leqslant n+i$.
   • Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, on pose $x_i=y_i-i$. Comme $i+1\leqslant y_i\leqslant n+i$, on a $1\leqslant x_i\leqslant n$, donc $(x_1,\dots,x_p)\in K_n^p$.
   Ainsi,
$$\psi:\begin{array}{ccc} S_n^p & \to & K_n^p\\ (a_1,a_2,\dots,a_p) & \mapsto & (a_1-1,a_2-2,\dots,a_p-p)\end{array}$$
   est bien définie.
   Il est alors évident que $\psi\circ\varphi=\mathrm{Id}_{K_n^p}$ et $\varphi\circ\psi=\mathrm{Id}_{S_n^p}$, donc φ et ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
3. Chaque partie à p éléments de $[\![2,n+p]\!]$ possède une unique façon de s'ordonner par ordre croissante et réciproquement, chaque p-uplet strictement croissant de $[\![2,n+p]\!]$ est constitué de p éléments distincts qui forment donc une partie à p éléments de $[\![2,n+p]\!]$.
   Il y a donc autant de p-uplets de $[\![2,n+p]\!]$ strictement croissants que de parties à p éléments de $[\![2,n+p]\!]$. D'où $\mathrm{Card}(S_n^p)=\binom{n+p-1}{p}$.
   D'après la question 2, K_n^p et S_n^p sont en bijection donc sont de même cardinal, d'où $\mathrm{Card}(K_n^p)=\binom{n+p-1}{p}$.

Méthode 2 :

1. Soient n et p des entiers strictement positifs.
   k_n^1 est le nombre de 1-uplets croissants d'éléments de $[\![1,n]\!]$, autrement dit le nombre d'éléments de $[\![1,n]\!]$. D'où $k_n^1=n$.
   k_1^p est le nombre de p-uplets croissants d'éléments de $\{1\}$. Or il y a un seul p-uplet, qui est $(1,\dots,1)$. Donc $k_1^p=1$.
2. Soient n et p des entiers strictement positifs. on définit
$$A_n^p=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in K_n^p\mid x_n=n\right\},$$
$$B_n^p=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in K_n^p\mid x_n\neq n\right\}.$$
   On a alors $A_n^p\cap B_n^p=\varnothing$ et $K_n^p=A_n^p\cup B_n^p$. Donc par partition,
$$k_n^p=\mathrm{Card}(K_n^p)=\mathrm{Card}(A_n^p)+\mathrm{Card}(B_n^p).$$
   Or, on peut remarquer que B_n^p est en fait K_{n-1}^p, et donc que $\mathrm{Card}(B_n^p)=k_{n-1}^p$.
   Un élément de A_n^p se termine par n (1 seule possibilité). Ses $p-1$ premières coordonnées forment donc un $p-1$ uplets d'éléments de $[\![1,n]\!]$ croissant et qui doivent être plus petit que n. Il y a donc autant de possibilités que d'éléments de K_n^{p-1}. Donc $\mathrm{Card}(A_n^p)=k_n^{p-1}$.
   On obtient bien que $k_n^p=k_n^{p-1}+k_{n-1}^p$.
3. On pense à une démonstration par récurrence. Cependant, la formule à montrer dépend de deux indices. Il faut donc adapter notre récurrence, par exemple en imbriquant deux récurrences, une pour chaque indice.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose H_n : « Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $k_n^p=\binom{n+p-1}{p}$ ».
   Initialisation : On à déjà montré que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $k_1^p=1=\binom{1+p-1}{p}$. Donc H_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Nous allons montrer H_{n+1} par récurrence sur p. (Woah, une récurrence dans une récurrence).

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose G_p : « $k_{n+1}^p = \binom{n+p}{p}$ »

- Initialisation :

  D'après la question 1, $k_{n+1}^1 = n+1 = \binom{n+1}{1}$. Donc G_1 est vraie.

- Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que G_p est vraie.

  Donc, d'après G_p, $k_{n+1}^p = \binom{n+p}{p}$.

  De plus, d'après H_n, on a $k_n^{p+1} = \binom{n+p}{p+1}$ (Oui, on est toujours dans l'hérédité de H).

  Par question 2 puis triangle de Pascal, on a

  $$k_{n+1}^{p+1} = k_{n+1}^p + k_n^{p+1} = \binom{n+p}{p} + \binom{n+p}{p+1} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

  Donc G_{p+1} est vraie.

- Conclusion : Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $k_{n+1}^p = \binom{n+p}{p}$.

Donc, on a montré que H_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

Solution 15 –

1. $\binom{p+q}{n}$ est le nombre de parties à n éléments dans un ensemble E de cardinal $p+q$. On prend $E = [\![1, p+q]\!]$.
   Une partie à n éléments de $[\![1, p+q]\!]$ contient un certain nombre k d'éléments de $[\![1, p]\!]$ et $n-k$ éléments de $[\![p+1, p+q]\!]$, avec $k \in [\![0, n]\!]$.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Il y a $\binom{p}{k}$ façons de choisir k éléments dans $[\![1, p]\!]$ et $\binom{q}{n-k}$ façons de choisir $n-k$ éléments dans $[\![p+1, p+q]\!]$. Soit au total $\binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k}$ façons de créer un ensemble à n éléments de $[\![1, p+q]\!]$ dont k sont dans $[\![1, p]\!]$ et $n-k$ sont dans $[\![p+1, p+q]\!]$.
   Il y a donc $\binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k}$ parties de $[\![1, p+q]\!]$ à n éléments dont k d'éléments de $[\![1, p]\!]$ et $n-k$ éléments de $[\![p+1, p+q]\!]$.
   Cette distinction selon k réalise une partition de l'ensemble des parties de $[\![1, p+q]\!]$ à n éléments. Donc, par principe de partition, on a

   $$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k}.$$

2. On va utiliser la formule du binôme de Newton puis la formule du produit de polynômes.

   $$(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$$
   $$\left(\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n} X^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{p+q} \binom{p+q}{n} X^n\right)$$
   $$\sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{p}{i}\binom{q}{n-i}\right) X^n = \left(\sum_{n=0}^{p+q} \binom{p+q}{n} X^n\right)$$

   Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de chaque degré sont égaux. Donc pour tout $n \in [\![0, \min(p,q)]\!]$,

   $$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k}$$

Solution 16 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.
   Il y a un seul n-uplet d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme est 0 : $(0, \dots, 0)$. Donc $S_n^0 = 1$.
   Les n-uplets d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme est 1 sont :

   $$(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1),$$

   donc $S_n^1 = n$.
   Il y a 2 types de n-uplets d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme est 2. Ceux qui ont un 2 et ceux qui ont deux 1.
   Il y a n éléments du premier type et $\binom{n}{2}$ du deuxième type (autant que de façons de choisir l'emplacement de deux 1).
   Soit au total $S_n^2 = n + \binom{n}{2} = n + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il y a un seul 1-uplet d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme est p : (p). Donc $S_1^p = 1$.
Les 2-uplets d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme est p sont

$$(0,p),(1,p-1),\dots,(p-1,1),(p,0)$$

Donc $S_2^p = p+1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On dénombre les façons de construire un $n+1$-uplet $(x_1,\dots,x_{n+1})$ tel que $x_1+\dots+x_{n+1} = p$.
On effectue une disjonction selon la valeur de x_{n+1} :
   - Si $x_{n+1} = 0$. Alors la somme des $x_1,x_2,\dots,x_n$ fait p. Il y a donc S_n^p possibilités pour construire un tel $n+1$-uplet.
   - Si $x_{n+1} = 1$. Alors la somme des $x_1,x_2,\dots,x_n$ fait $p-1$. Il y a donc S_n^{p-1} possibilités pour construire un tel $n+1$-uplet.

   $\vdots$
   - Si $x_{n+1} = p$. Alors la somme des $x_1,x_2,\dots,x_n$ fait 0. Il y a donc S_n^0 possibilités pour construire un tel $n+1$-uplet.

   Par principe de partition,
$$S_{n+1}^p = S_n^0 + \dots + S_n^p.$$

3. On remarque que
$$\forall n,p \geqslant 1, \qquad S_n^1 = n, \ \ S_1^p = 1.$$
$$S_{n+1}^p = S_{n+1}^{p-1} + S_n^p$$
Donc S_n^p a les mêmes conditions initiales et vérifie la même relation de récurrence que k_n^p de l'exercice 8. Donc, avec la même preuve, on obtient que
$$\forall n,p \geqslant 1, \quad S_n^p = k_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Solution 17 –

1. On peut dénombrer manuellement tous les chemins de $(0,0)$ à $(2,2)$:
$$\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow \qquad \uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow \qquad \uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow \qquad \rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow \qquad \rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow \qquad \rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow$$
Il y en a donc 6.
2. Ici, il va falloir être un peu plus malin :
Un chemin peut-être vu comme un mot de 8 symboles composé de 4 $\uparrow$ et de 4 $\rightarrow$. Il y a donc autant de chemins que de façons de positionner les 4 $\uparrow$ dans le mot de 8 symboles. (En effet, les $\rightarrow$ prennent alors forcément les 4 positions restantes)
Il y a donc $\binom{8}{4} = 70$ chemins possibles.
3. Un chemin reliant $(0,0)$ à $(4,4)$ et passant par $(1,2)$ est constitué d'un chemin reliant $(0,0)$ à $(1,2)$ et d'un chemin reliant $(1,2))$ à $(4,4)$.
En suivant le même principe que précédemment, il y a $\binom{3}{1} = 3$ chemins allant de $(0,0)$ à $(1,2)$ et $\binom{3}{5} = 10$ chemins différents.
Ainsi, par principe multiplicatif, il y a 30 chemins reliant $(0,0)$ à $(4,4)$ et passant par $(1,2)$.

Solution 18 –

1. Comme on est entre deux ensembles de même cardinal fini, une application est surjective si et seulement si elle est bijective, et on sait qu'il y a $n!$ bijection.
2. Ainsi, en notant S l'ensemble des applications surjectives de E dans E, on a que
$$\text{Card}(\overline{S}) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(S) = n^n - n!$$
3. Il n'y a que 2 applications non-surjectives de E dans $\{0,1\}$: Les applications constantes égales à 1 ou à 2. Ainsi, par passage au complémentaire, il y a $2^n - 2$ applications surjectives de E dans $\{0,1\}$.
4. On reprend la démarche précédente : il y a 3^n applications de E dans E. Celles qui ne sont pas surjectives sont celles qui ont pour image l'un des ensembles suivants :
$$\{0\} \qquad \{1\} \qquad \{2\} \qquad \{0,1\} \qquad \{0,2\} \qquad \{1,2\}$$
Il y a exactement une application dont l'image est un ensemble donné de cardinal 1, et d'après la question précédente, $2^n - 2$ applications dont l'image est un ensemble donné de cardinal 2. Puisqu'il y a 3 parties de E de cardinal 1, et 3 parties de cardinal 2, il y a donc $3 + 3 \times (2^n - 2)$ applications de E dans $\{0,1,2\}$ qui ne sont pas surjectives.
Il y a donc $3^n - 3 \times 2^n + 3$ applications surjectives de E dans $\{0,1,2\}$.

Solution 19 – Choisir une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ revient à choisir l'ensemble des p nombres images. Une fois ceux-ci déterminés, comme l'application est strictement croissante, il n'y a qu'une seule manière d'associer ces images aux p éléments de départ.
Ainsi, le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ est le même que le nombre de parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$

Solution 20 –

1. Pour tout $n \in [\![0, p]\!]$, on a

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{k!}\,\frac{1}{(p-k)!(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}\\ &= \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\\ &= \binom{n}{p}2^p\end{aligned}$$

2. D'après la formule du binôme :

$$(1+2X)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{p}2^p X^p$$

et

$$\begin{aligned}((1+X)+X)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1+X)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\left(\sum_{p=0}^{n-k}\binom{n-k}{p}X^{n-k-p}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p}X^{n-p}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}X^i \text{ changement d'indice } i=n-p\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}X^i \text{ car } \binom{n-k}{n-i} = \binom{n-k}{n-k-(n-i)}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}X^i\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients dans les deux expressions, on obtient l'égalité demandée.

3.
   - **Méthode 1 :** B est une partie de cardinal p de E, il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités pour B. Puis, A est une partie de B, il y a donc 2^p possibilités pour A, soit par principe multiplicatif, $2^p\binom{n}{p}$ couples (A,B) tels que $A \subset B \subset E$, et $\mathrm{Card}(B) = p$.
   - **Méthode 2 :** On fait un disjonction de cas selon le cardinal de A. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, il y a $\binom{n}{k}$ parties A de E comportant k éléments. La partie B contient alors les éléments de A et $p-k$ autres éléments, choisis parmi les $n-k$ qui restent, pour lesquels il y a $\binom{n-k}{p-k}$ possibilités. Soit, par principe multiplicatif $\binom{n}{k}\times\binom{n-k}{p-k}$ couples (A,B) tels que $A \subset B \subset E$, $\mathrm{Card}(A) = k$ et $\mathrm{Card}(B) = p$.

     En faisant la somme de tous les cas possibles, on en déduit qu'il y a $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\times\binom{n-k}{p-k}$ couples (A,B) tels que $A \subset B \subset E$, et $\mathrm{Card}(B) = p$.
     Comme on a dénombré la même chose de deux façons différentes, on a

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\times\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$$

Quelques vidéos pour se cultiver:
Pour un peu de culture sur les cardinaux infinis :
Deux (deux ?) minutes pour l'hôtel de Hilbert - - El Jj
Sur la route de l'infini - Voyages au pays des maths - Arte

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique!
♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!