

EXERCICES — CHAPITRE 24

Exercice 1 (♥) – La famille de vecteurs $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 (♥) – La famille de vecteurs $((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3 (♥) – Démontrer que la famille $(X - 2, 2X + 3)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 4 (♥) – On considère $a = (1, i, -1, -i)$, $b = (0, 1 + i, 2i, i - 1)$ et $c = (1, 1, 1, 1)$. Prouver que (a, b, c) est une famille liée dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ et une famille libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

Exercice 5 (♥) – Familles libres et liées de fonctions réelles

Pour les familles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ci-dessous, dites si elles sont libres ou liées :

$$\mathcal{F}_1 = (\cos; \sin; \exp)$$

$$\mathcal{F}_2 = (\text{ch}; \text{sh}; \exp)$$

$$\mathcal{F}_3 = (\cos; \sin; f : x \mapsto \cos(x + \pi/4))$$

$$\mathcal{F}_4 = (f_0 = \sin; f_1 : x \mapsto \sin(2x); f_2 : x \mapsto \sin(4x); \dots; f_m : x \mapsto \sin(2^m x))$$

$$\mathcal{F}_5 = (f_1 : x \mapsto e^{a_1 x}; f_2 : x \mapsto e^{a_2 x}; \dots; f_n : x \mapsto e^{a_n x})$$

où $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Exercice 6 (♥) – Déterminer une famille génératrice, puis une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + y = 0 \text{ et } x + t = 0\}$;

2. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$.

Exercice 7 (♠) – Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que la famille

$$(1; (X - a); (X - a)^2; \dots; (X - a)^n)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Donner les coordonnées de P dans cette base.

3. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner les coordonnées du polynôme X^p dans cette base.

Exercice 8 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $e_k = \sum_{\ell=0}^k X^\ell$.

1. Démontrer que $(e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer les coordonnées du polynôme $P_k = X^k$ dans cette base.

Exercice 9 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n + 1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ vérifiant $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. De plus, on note :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - x_k).$$

1. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, vérifier que $P_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P_i(x_i) \neq 0$.

2. En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-elle génératrice?

Exercice 10 (♥) – Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble F des vecteurs $(x; y; z)$ tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et donner sa dimension.

Exercice 11 (♥) – Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $u = (1; 1; 1; 1)$ et $v = (1; 2; 1; -3)$. Donner la dimension de F , en donner une base, et donner un système d'équations qui caractérise F .

Exercice 12 (♥) – On considère l'ensemble

$$F = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(-1) = P(1) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$, en donner une base et sa dimension.

Exercice 13 (♥) – Montrer que l'ensemble

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = P'(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base, sa dimension et un supplémentaire dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 14 (♠) – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 15 (♦) – Dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + iy - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(a + ib, a - ib, a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Déterminer une base de F , une base de G , une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.

Exercice 16 (♥) – Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}.$$

Exercice 17 (♥) – Montrer que $F = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 0))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18 (♥) – Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(X + 1)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 19 (♥) – On pose

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Prouver que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 20 (♥) – Déterminer un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 21 (♦) – Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $a = (1, 2, 0, 1)$, $b = (2, 1, 3, -1)$, $c = (4, 5, 3, 1)$ et $F = \text{Vect}(a, b, c)$.

1. Déterminer la dimension et une base de F . Déterminer un système d'équations de F .
2. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}$. Déterminer une base de G et sa dimension.
3. Montrer que $F \oplus G = E$. Donner la décomposition selon F et G du vecteur $s = (6, 10, 8, 2)$.

Exercice 22 (♥) – Soit D l'ensemble des matrices diagonales de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que D et F sont supplémentaires dans E .

Exercice 23 (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Dans cette question $n = 3$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
 - (b) Montrer que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

2. On revient au cas général

- (a) Donner sans justification une base et la dimensions de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.
- (b) Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 24 (♠) – Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.

Soit H et H' deux hyperplans de E c'est-à-dire des sous-espace vectoriels de E de dimension $n - 1$.

1. Montrer que $\dim(H + H') = n - 1$ si, et seulement si, $H = H'$.
On suppose désormais que $H \neq H'$.
2. Montrer que $H + H' = E$.
3. Montrer que $\dim(H \cap H') = n - 2$.
4. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel D qui soit un supplémentaire dans E à H et à H' .

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!