

EXERCICES — CHAPITRE 24

Solution 1 – Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(2, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Cette équation s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \boxed{1}\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \boxed{1}\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \boxed{1}\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \boxed{1}\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \boxed{-1}\lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

On obtient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, ce qui montre que la famille est libre.
Comme cette famille contient trois vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution 2 – Déjà, la famille ne peut pas être génératrice car elle contient trois vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1, 1, 1, 1) + \lambda_2(1, 0, 1, 0) + \lambda_3(2, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$. Cette équation se réécrit :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \boxed{1}\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \boxed{1}\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \boxed{1}\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \boxed{1}\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \boxed{-1}\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

On a donc que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, ce qui montre que la famille est libre.

Solution 3 – Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(X - 2) + \lambda_2(2X + 3) = 0$. On a $(-2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)X = 0$. En identifiant les coefficients des polynômes, on obtient :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \boxed{1}\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{7}\lambda_2 = 0 \\ \boxed{1}\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

Donc $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, ce qui prouve que la famille est libre.

La famille contient deux vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution 4 – Notons $\mathcal{F} = (a, b, c)$.

1. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \boxed{1}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + (1+i)\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2i\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -i\lambda_1 + (i-1)\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \boxed{1}\lambda_3 = 0 \\ (i-1)\lambda_1 + (1+i)\lambda_2 = 0 \\ \boxed{-2}\lambda_1 + 2i\lambda_2 = 0 \\ (-1-i)\lambda_1 + (i-1)\lambda_2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i\lambda_2 + \boxed{1}\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boxed{-2}\lambda_1 + 2i\lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{matrix}$$

Comme on n'a pas pu choisir un pivot dans chaque colonne, on aura une inconnue secondaire et donc une infinité de solutions :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{(i\lambda_2, \lambda_2, -i\lambda_2) \mid \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

ce qui montre que $\mathcal{F}$ n'est pas libre dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

2. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$. On a

$$(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3 + i(\lambda_1 + \lambda_2), -\lambda_1 + \lambda_3 + 2i\lambda_2,$$

$$-\lambda_2 + \lambda_3 + i(-\lambda_1 + \lambda_2)) = (0, 0, 0, 0).$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{1} \lambda_1 & + & \lambda_3 = 0 \\ & & 0 = 0 \\ & \lambda_2 + & \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + & \lambda_2 & = 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_3 = 0 \\ & 2\lambda_2 & = 0 \\ & - \lambda_2 + & \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + & \lambda_2 & = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{1} \lambda_1 & + & \lambda_3 = 0 \\ & & 0 = 0 \\ & \boxed{1} \lambda_2 + & \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 - & \lambda_3 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ & 2\lambda_3 = 0 & L_5 \leftarrow L_5 + L_1 \\ & 2\lambda_2 & = 0 \\ & - \lambda_2 + & \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 + & \lambda_3 = 0 & L_8 \leftarrow L_8 + L_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{1} \lambda_1 & + & \lambda_3 = 0 \\ & & 0 = 0 \\ & \boxed{1} \lambda_2 + & \lambda_3 = 0 \\ & + \boxed{-2} \lambda_3 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ & 2\lambda_3 = 0 \\ & - 2\lambda_3 = 0 & L_6 \leftarrow L_6 - 2L_3 \\ & 2\lambda_3 = 0 & L_7 \leftarrow L_7 + L_3 \\ & 0 = 0 & L_8 \leftarrow L_8 - L_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Ainsi, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, donc la famille est libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

Solution 5 –

1. Soient λ, μ, ν réels tels que $\lambda \cos + \mu \sin + \nu \exp = 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \nu \exp(x) = 0$.

En $x = 0$, on a $\lambda \cos(0) + \mu \sin(0) + \nu \exp(0) = 0$, c'est à dire $\lambda + \nu = 0$.

En $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda \cos(\frac{\pi}{2}) + \mu \sin(\frac{\pi}{2}) + \nu \exp(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c'est à dire $\mu + \nu e^{\pi/2} = 0$.

En $x = \pi$, on a $\lambda \cos(\pi) + \mu \sin(\pi) + \nu \exp(\pi) = 0$,

c'est à dire $-\lambda + \nu e^{\pi} = 0$.

$$\lambda, \mu, \nu \text{ vérifient donc le système } \begin{cases} \lambda & + & \nu & = 0 \\ & \mu & + & e^{\pi/2} \nu & = 0 \\ -\lambda & + & e^{\pi} \nu & = 0 \end{cases}.$$

En additionnant la première et la troisième ligne, on obtient $\nu(1 + e^{\pi}) = 0$, donc $\nu = 0$.
Puis à l'aide des deux premières lignes, $\lambda = \mu = 0$.

Donc la famille $(\cos, \sin, \exp)$ est libre.

2. $\exp = \frac{\text{ch} + \text{sh}}{2}$, donc la famille $(\text{ch}; \text{sh}; \exp)$ est liée.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(x) \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(x) \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x).$$

Donc $f = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin$ et la famille $(\cos, \sin, f)$ est liée.

4. Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{F}_4$ est libre.

Initialisation : Pour $m = 1$, $\mathcal{F}_4 = (\sin)$ donc est libre.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $(f_0, \dots, f_m)$ est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ réels tels que $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_m f_m + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) + \lambda_{m+1} f_{m+1}(x) = 0.$$

En $\frac{\pi}{2}$,

$$\lambda_0 f_0(\frac{\pi}{2}) + \dots + \lambda_m f_m(\frac{\pi}{2}) + \lambda_{m+1} f_{m+1}(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket$, $f_k(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $f_0(\frac{\pi}{2}) = 1$, donc on a $\lambda_0 = 0$. On remarque également que, en posant $y = 2x$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m + \lambda_{m+1} f_{m+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{m+1} f_{m+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(2x) + \dots + \lambda_{m+1} \cos(2^{m+1}x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(y) + \dots + \lambda_{m+1} \cos(2^m y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_0(y) + \dots + \lambda_{m+1} f_m(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 f_0 + \dots + \lambda_{m+1} f_m &= 0 \end{aligned}$$

Or la famille $(f_0, \dots, f_m)$ est libre par hypothèse de récurrence. Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda_{m+1} = 0$. D'où le résultat au rang $m+1$.

Par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(f_0, \dots, f_m)$ est libre.

5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathcal{F}_5$ est libre.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\mathcal{F}_5 = (f_1)$ donc est libre.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ réels tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lambda_1 e^{a_1 x} + \dots + \lambda_{n+1} e^{a_{n+1} x} &= 0 \\ e^{-a_{n+1} x} (\lambda_1 e^{a_1 x} + \dots + \lambda_{n+1} e^{a_{n+1} x}) &= 0 \\ \lambda_1 e^{(a_1 - a_{n+1})x} + \dots + \lambda_n e^{(a_n - a_{n+1})x} + \lambda_{n+1} e^{(a_{n+1} - a_{n+1})x} &= 0 \\ \lambda_1 e^{(a_1 - a_{n+1})x} + \dots + \lambda_n e^{(a_n - a_{n+1})x} + \lambda_{n+1} &= 0\end{aligned}$$

Pour tout $j < n+1$, $a_j < a_{n+1}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(a_j - a_{n+1})x} = 0$. Donc, en prenant la limite en $+\infty$ dans la dernière égalité, on obtient $\lambda_{n+1} = 0$. On a alors $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. Par hypothèse de récurrence, $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Donc $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est libre.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Solution 6 –

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in E &\iff \begin{cases} y &= -3x \\ t &= -x \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) \in \{(x, -3x, z, -x) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}((1, -3, 0, -1), (0, 0, 1, 0))$. De plus les deux vecteurs générateurs ne sont pas colinéaires donc ils sont libres et forment une base de E .

2. (a) *Méthode 1.* Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}P \in F &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X-1)Q && \text{car 1 est racine de } P \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X-1)(aX+b)\end{aligned}$$

donc $F = \text{Vect}(X-1, X(X-1))$. Les deux vecteurs générateurs sont non colinéaires (ou échelonnés en degré), donc ils forment une famille libre puis une base de F .

- (b) *Méthode 2.* Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a + bX + cX^2$.

$$\begin{aligned}P \in F &\iff P(1) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c \\ &\iff (a, b, c) \in \{(-b-c, b, c) \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}(-1+X, -1+X^2)$. Les deux vecteurs générateurs sont non colinéaires (ou échelonnés en degré), donc ils forment une famille libre puis une base de F .

Solution 7 –

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X-a)^n$ est un polynôme de degré n . Ainsi, la famille $(1; (X-a); (X-a)^2; \dots; (X-a)^n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ non-nuls et de degré distincts, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule de Taylor appliquée en a , on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base, les coordonnées de P dans la base $(1; (X-a); (X-a)^2; \dots; (X-a)^n)$ sont

$$\left(P(a), P'(a), \frac{P''(a)}{2}, \dots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \right).$$

- On note $Q = X^p$. D'après le cours sur les polynômes, pour $k \leq p$, la dérivée k -ième de X^p est $\frac{p!}{(p-k)!} X^{p-k}$. Donc $\frac{Q^{(k)}(a)}{k!} = \frac{p!}{(p-k)!k!} a^{p-k} = \binom{p}{k} a^{p-k}$.

Si $k > p$, alors $k > \deg(Q)$ donc la dérivée k -ième de Q est le polynôme nul.

Donc les coordonnées de Q dans la base $(1; (X-a); (X-a)^2; \dots; (X-a)^n)$ sont

$$\left(\binom{p}{0} a^p, \binom{p}{1} a^{p-1}, \dots, \binom{p}{p-1} a, \binom{p}{p}, 0, \dots, 0 \right).$$

Solution 8 –

- La famille est libre en tant que famille de polynômes de degrés échelonnés. De plus, elle contient $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- On a $1 = e_0$ donc 1 est de coordonnées $(1, 0, \dots, 0)$. De plus, pour tout $k \geq 1$, $X^k = e_k - e_{k-1}$ donc X^k est de coordonnées $(0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{(i-1)\text{-ème position}}, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0)$.

Solution 9 –

- Si $i \neq j$, $X - x_j$ est un facteur de P_i , d'où $P_i(x_j) = 0$. De plus, $P_i(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k)$ est non nul en tant que produit de facteurs non nuls.
- Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{\ell=0}^n \lambda_\ell P_\ell = 0$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $\sum_{\ell=0}^n \lambda_\ell P_\ell(x_i) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i P_i(x_i) = 0$, d'où $\lambda_i = 0$ puisque $P_i(x_i) \neq 0$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ et la famille est libre. Puisque cette famille contient $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, cette famille est également génératrice.

Solution 10 – Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{2\lambda}{3} \\ y = -\frac{\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(-2, -1, 3) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-2, -1, 3)) \end{aligned}$$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 dont une base est $((-2, -1, 3))$.

Solution 11 – F est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 dont une base est $((1; 1; 1; 1), (1; 2; 1; -3))$.

Soit $a = (x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$a \in F \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x; y; z; t) = \lambda(1; 1; 1; 1) + \mu(1; 2; 1; -3)$$

$$\begin{aligned} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \\ t = \lambda - 3\mu \end{cases} \\ \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ -x + y = \mu \\ -x + z = 0 \\ -x + t = \lambda - 4\mu \end{cases} \\ \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2x - y = \lambda \\ -x + y = \mu \\ -x + z = 0 \\ -5x + 4y + t = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -5x + 4y + t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} -x + z = 0 \\ -5x + 4y + t = 0 \end{cases}$ est un système d'équations de F .

Solution 12 – Soit $P \in \mathbb{C}^4[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in F &\iff 1 \text{ et } -1 \text{ sont racines de } P \\ &\iff P \text{ est divisible par } (X-1)(X+1) = X^2 - 1. \\ &\iff \text{Il existe } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = (X^2 - 1)Q. \end{aligned}$$

Comme $\deg(P) \leq 4$ et $\deg((X^2 - 1)Q) = 2 + \deg(Q)$, un tel Q a forcément un degré inférieur ou égal à 2. Donc

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad P = (X^2 - 1)Q \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \quad P = (X^2 - 1)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \quad P = a(X^4 - X^2) + b(X^3 - X) + c(X^2 - 1) \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^4 - X^2; X^3 - X; X^2 - 1) \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}(X^4 - X^2; X^3 - X; X^2 - 1)$. La famille $(X^4 - X^2; X^3 - X; X^2 - 1)$ contient des polynômes non-nuls et de degrés distincts, donc est libre. C'est donc une base de $\text{Vect}(X^4 - X^2; X^3 - X; X^2 - 1)$ (vu qu'elle en est évidemment une famille génératrice).

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$ de dimension 3 dont $(X^4 - X^2; X^3 - X; X^2 - 1)$ est une base.

Solution 13 – On a $F \subset \mathbb{R}_4[X]$.

Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$, avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Alors $P' = 4aX^3 + 3bX^2 + cX + d$ et

$$P \in F \iff \tilde{P}(1) = \tilde{P}'(1) = \tilde{P}'(0) = 0$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + e = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + e = 0 \\ -b - 2c - 4e = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \lambda + 3\mu \\ b = -2\lambda - 4\mu \\ c = \lambda \\ d = 0 \\ e = \mu \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (a, b, c, d, e) = \lambda(1, -2, 1, 0, 0) + \mu(3, -4, 0, 0, 1)$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, P = \lambda(X^4 - 2X^3 + X^2) + \mu(3X^4 - 4X^3 + 1)$$

$$\iff P \in \text{Vect}((X^4 - 2X^3 + X^2), (3X^4 - 4X^3 + 1))$$

D'où $F = \text{Vect}((X^4 - 2X^3 + X^2), (3X^4 - 4X^3 + 1))$.

$X^4 - 2X^3 + X^2$ et $3X^4 - 4X^3 + 1$ ne sont pas colinéaires, donc

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension 2 dont $(X^4 - 2X^3 + X^2, 3X^4 - 4X^3 + 1)$ est une base.

Comme $3(X^4 - 2X^3 + X^2) - (3X^4 - 4X^3 + 1) = -2X^3 + 3X^2 - 1$, on en déduit que $(X^4 - 2X^3 + X^2, -2X^3 + 3X^2 - 1)$ est également une base de F .

La famille $(3X^4 - 4X^3 + 1, -2X^3 + 3X^2 - 1, 1, X, X^2)$ est contenue dans 5 polynômes non-nuls de degrés différents donc est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Donc

$G = \text{Vect}(1, X, X^2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Solution 14 – F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ donc $F + G$ aussi. Donc $\dim(F + G) \leq 5$. D'après la formule de Grassmann, $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(F \cap G)$.

Donc, $\dim(F \cap G) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) \geq 6 - 5 = 1$.

Donc $F \cap G \neq \{0\}$.

Solution 15 –

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. $(x, y, z) \in F \iff x = -iy + z$, donc $F = \text{Vect}((-i, 1, 0), (1, 0, 1))$. Puisque la famille $((-i, 1, 0), (1, 0, 1))$ est libre (les vecteurs sont non colinéaires), on obtient que c'est une base de F .

2. $G = \text{Vect}((1, 1, 1), (i, -i, 1))$ et comme la famille $((1, 1, 1), (i, -i, 1))$ est libre, c'est une base de G .

3. $F + G = \text{Vect}((-i, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (i, -i, 1))$.

Notons $\mathcal{F} = ((-i, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (i, -i, 1))$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

$$\begin{pmatrix} -i & \boxed{1} & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -i & \boxed{1} & 1 & i \\ 1 & 0 & \boxed{1} & -i \\ i & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -i-1 & \boxed{1} & 0 & 2i \\ 1 & 0 & \boxed{1} & -i \\ \boxed{i} & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Si on enlève la quatrième colonne, on obtient un pivot dans chaque colonne (il n'y aura donc plus d'inconnue secondaire), donc les trois premiers vecteurs forment une famille libre maximale de $F + G$.

Donc une base de $F + G$ est $((-i, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1))$.

4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F \cap G &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} x = a + ib \\ y = a - ib \\ z = a + b \\ x + iy - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} x = a + ib \\ y = a - ib \\ z = a + b \\ a + ib + i(a - ib) - (a + b) = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} x = a + ib \\ y = a - ib \\ z = a + b \\ i(a + b) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $F \cap G = \text{Vect}((1 - i, 1 + i, 0))$.

Remarque : cohérent avec la formule de Grassmann, puisque $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, donc $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 3 = 1$. Notons que la détermination de $F \cap G$ permettait directement de déduire que $F + G = \mathbb{C}^3$ à l'aide de cette formule.

Solution 16 – Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in E &\iff \begin{cases} x = -y + t \\ z = y + t \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) \in \{(-y + t, y, y + t, t) \mid (y, t) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Donc $E = \text{Vect}((-1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1))$, puis comme $u = (-1, 1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1, 1)$ sont non colinéaires, (u, v) est une base de E .

Essayons de la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ et considérons (u, v, e_1, e_2) , où e_1, e_2 sont les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_2 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \boxed{1}\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & + \boxed{4}\lambda_4 = 0 \\ \boxed{1}\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + \boxed{1}\lambda_3 & = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -\lambda_2 & + \boxed{4}\lambda_4 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \boxed{1}\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \boxed{1}\lambda_2 & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 & = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ \boxed{4}\lambda_4 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_4 \\ \boxed{1}\lambda_1 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ \boxed{1}\lambda_2 & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille (u, v, e_1, e_2) est donc libre. Comme elle contient 4 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Le cours assure alors qu'un supplémentaire de E est $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

Solution 17 – Utilisons une caractérisation des supplémentaires en dimension finie. F est engendré par deux vecteurs non-colinéaires donc est de dimension 2. G est engendré par un vecteur non-nul donc est de dimension 1.

Soit $v \in F \cap G$. Alors, $v = (0, x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ car $v \in G$.

$v \in F$, donc il existe λ et μ des réels tels que $v = \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, 1, 1)$, c'est-à-dire

$$(0, x, 0) = (\lambda, 2\lambda + \mu, \lambda + \mu).$$

L'égalité sur la première coordonnée donne $\lambda = 0$ puis la dernière donne $\mu = 0$. On en déduit que v est le vecteur nul. Réciproquement, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donc contient $(0, 0)$, d'où $F \cap G = \{0\}$.

On a montré que $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Solution 18 – $F \subset \mathbb{R}_3[X]$, F contient le polynôme nul et F est stable par combinaison linéaire, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $P \in F \cap G$. $P \in G$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X + 1)$. $P \in F$ donc $P(1) = 0$, c'est à dire $a = 0$. D'où $P = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$, $F \cap G = \{0\}$.

$(X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une famille d'éléments de F non-nuls et de degrés distincts, donc libre (donc de rang 3). F est donc de dimension au moins 3. Or, $F \neq \mathbb{R}_3[X]$ (par exemple, $1 \notin F$), donc F ne peut pas être de dimension 4. Donc $\dim(F) = 3$. On a évidemment $\dim(G) = 1$. Donc $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Donc

F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution 19 – $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et les deux vecteurs générateurs forment une famille libre car ils sont non colinéaires, donc $\dim(F) = 2$. De même, $\dim(G) = 2$.

Soit $M \in F \cap G$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} c & 3c+d \\ -d & -2c+d \end{pmatrix}$. On obtient immédiatement $a = c$ et $b = d$, puis $2a + b = 3c + d$ fournit $a = c = 0$. Enfin, $-a = -2c + d$ donne $d = 0$. Finalement, $M = 0$, d'où $F \cap G \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant immédiate, on obtient que $F \cap G = \{0\}$.

Puisque $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, on en déduit que $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution 20 – Notons $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(-X) = P(X)\}$. Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$.

$$P \in F \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -b \\ c = c \\ d = -d \\ e = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

donc $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4)$. Comme $(1, X^2, X^4, X, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, on en déduit que $G = \text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Solution 21 –

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = \alpha \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = \beta \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = \delta \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = \alpha \\ \boxed{-3} \lambda_2 - 3\lambda_3 = -2\alpha + \beta \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = -\alpha + \delta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \boxed{3} \lambda_1 + 6\lambda_3 = -\alpha + 2\beta \\ \boxed{-3} \lambda_2 - 3\lambda_3 = -2\alpha + \beta \\ 0 = -6\alpha + 3\beta + 3\gamma \\ 0 = 3\alpha - 3\beta + 3\delta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - 3L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Comme on n'a pas pu choisir de pivot dans la troisième colonne, on a une infinité de solutions donc la famille n'est pas libre. Par contre, (a, b) est une famille libre maximale, donc une base de F .

On obtient aussi qu'un système d'équation de F est $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$.

2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. $(x, y, z, t) \in G$ équivaut à (S) :
$$\begin{cases} 2x + \boxed{1}y + z + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \text{ On a}$$

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + \boxed{1}y + z + & t = 0 \\ x & + z + \boxed{-1}t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + \boxed{1}y + 2z & = 0 \\ x & + z + \boxed{-1}t = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

Notons $(d, e) = ((1, -3, 0, 1), (0, -2, 1, 1))$. Alors $G = \text{Vect}(d, e)$, (d, e) est une base de G et $\dim(G) = 2$.

3. Comme on demande la décomposition d'un vecteur dans $F \oplus G$, on ne va pas utiliser la caractérisation avec $F \cap G = \{0\}$ mais plutôt celle avec $F + G = \mathbb{R}^4$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Une famille génératrice de $F + G$ est (a, b, d, e) d'après le cours et les questions précédentes. Donc $(x, y, z, t) \in F + G$ si et seulement si le système suivant est compatible :

$$(S): \begin{cases} \boxed{1} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= x \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 &= y \\ 3\lambda_2 &+ \lambda_4 = z \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(S) \quad & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{1} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ -3\lambda_2 - 5\lambda_3 - 2\lambda_4 & = & -2x + y \\ 3\lambda_2 + \boxed{1} \lambda_4 & = & z \\ -3\lambda_2 + \lambda_4 & = & t - x \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{1} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ \boxed{3} \lambda_2 - 5\lambda_3 & = & -2x + y + 2z \\ 3\lambda_2 + \boxed{1} \lambda_4 & = & z \\ -6\lambda_2 & = & t - x - z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{3} \lambda_1 + 13\lambda_3 & = & 7x - 2y - 4z \\ \boxed{3} \lambda_2 - 5\lambda_3 & = & -2x + y + 2z \\ 15\lambda_3 + \boxed{3} \lambda_4 & = & 6x - 3y - 3z \\ -30\lambda_3 & = & 3t - 15x + 6y + 9z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + 6L_2 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{3} \lambda_1 + 13\lambda_3 & = & 7x - 2y - 4z \\ \boxed{3} \lambda_2 - 5\lambda_3 & = & -2x + y + 2z \\ 15\lambda_3 + \boxed{3} \lambda_4 & = & 6x - 3y - 3z \\ + \boxed{-30} \lambda_3 & = & 3t - 15x + 6y + 9z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + 6L_2 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{90} \lambda_1 & = & 39t + 15x + 18y - 3z \\ \boxed{90} \lambda_2 & = & -15t + 15x + 15z \\ \boxed{90} \lambda_4 & = & 45t - 45x + 45z \\ + \boxed{-30} \lambda_3 & = & 3t - 15x + 6y + 9z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 30L_1 + 13L_4 \\ L_2 \leftarrow 30L_2 - 5L_4 \\ L_3 \leftarrow 30L_3 + 15L_4 \end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi, le système est toujours compatible, ce qui signifie que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Or $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Enfin, en choisissant $(x, y, z, t) = (6, 10, 8, 2)$, la résolution précédente donne que les coordonnées dans la base (a, b, d, e) (adaptée à $F \oplus G$) sont $\left(\frac{18}{5}, 2, -\frac{8}{5}, 2\right)$. En particulier,

$$(6, 10, 8, 2) = \underbrace{\left(\frac{18}{5}a + 2b\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(-\frac{8}{5}d + 2e\right)}_{\in G}.$$

Solution 22 – D est engendré par $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $\dim(D) = 2$. De même A et B sont linéairement indépendantes, d'où $\dim(F) = 2$.

Soit $M \in D \cap F$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aA + bB = \begin{pmatrix} b & a+b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et $M = cG +$

$dH = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Ainsi $b = 0$, puis $a + b = 0$ conduit à $a = 0$. Donc $M = 0$ puis $D \cap F \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant évidente, on a $D \cap F = \{0\}$. Or $\dim(D) + \dim(F) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, donc $D \oplus F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution 23 –

1. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ avec $a, b, c, d, e, f, g, h, k \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{S}_3 &\iff M = M^T \\
 &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix} \\
 &\iff b = d, \quad g = c, \quad f = h \\
 &\iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & k \end{pmatrix} \\
 &\iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff M = aE_{1,1} + b(E_{1,2} + E_{2,1}) + c(E_{1,3} + E_{3,1}) + eE_{2,2} \\
 &\quad + f(E_{2,3} + E_{3,2}) + kE_{3,3}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}_3 = \text{Vect}((E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3} + E_{3,2}, E_{3,3}))$. De plus, cette famille est libre. En effet, aucun vecteur n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, puisque chaque $E_{i,j}$ est le seul à avoir un coefficient non-nul à l'emplacement (i, j) .

Ainsi, $\mathcal{S}_3$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de dimension 6 dont $(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3} + E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base.

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{A}_3 &\iff M = -M^T \\
 &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -k \end{pmatrix} \\
 &\iff a = e = k = 0, \quad b = -d, \quad g = -c, \quad f = -h \\
 &\iff M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff M = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff M = b(E_{1,2} - E_{2,1}) + c(E_{1,3} - E_{3,1}) + f(E_{2,3} - E_{3,2})
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}_3 = \text{Vect}((E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2}))$. De plus, cette famille est libre. En effet, aucun vecteur n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, puisque chaque $E_{i,j}$ est le seul à avoir un coefficient non-nul à l'emplacement (i, j) .

Ainsi, $\mathcal{S}_3$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de dimension 3 dont $(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2})$ est une base.

- (b) Soit $M \in \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{A}_3$. Alors $M = M^T = -M$ donc $M = 0$. Réciproquement, la matrice nulle est à la fois symétrique et anti-symétrique donc $\mathcal{S}_3 \cap \mathcal{A}_3 = \{0\}$.

De plus, $\dim(\mathcal{S}_3) + \dim(\mathcal{A}_3) = 6 + 3 = 9 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{K}))$. Donc, par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

2. (a) $\mathcal{S}_n$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Pour constituer une base de $\mathcal{S}_n$, on peut prendre une famille contenant exactement les éléments suivants :

- Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $E_{i,i}$.
- Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket i+1, n \rrbracket$, $E_{i,j} + E_{j,i}$.

$$\mathcal{A}_n \text{ est de dimension } \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pour constituer une base de $\mathcal{A}_n$, on peut prendre une famille constituée des éléments suivants : Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket i+1, n \rrbracket$, $E_{i,j} - E_{j,i}$.

(b) Remarquons tout d'abord que

$$\dim(\mathcal{S}_n) + \dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})).$$

De plus, on peut reprendre exactement la même preuve que dans la question 1)b) pour montrer que $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.

Ainsi, ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Autre méthode sans utiliser la question a :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, on pose $S = \frac{M + M^T}{2}$ et $A = \frac{M - M^T}{2}$.

Alors $S^T = \frac{M^T + M}{2} = S$, $A^T = \frac{M^T - M}{2} = -A$ et $A + S = M$. Donc $A \in \mathcal{A}_n$, $S \in \mathcal{S}_n$ et $M \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Comme $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$. Alors $M = M^T = -M$ donc $M = 0$. Réciproquement, la matrice nulle est à la fois symétrique et anti-symétrique donc $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.

Par caractérisation des supplémentaires en dimension finie (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie),

$\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution 24 –

1. Si $H = H'$, alors $H + H' = H$ donc $\dim(H + H') = n - 1$.

Réciproquement, si $\dim(H + H') = n - 1$, comme E est de dimension finie, d'après la formule de Grassmann, $\dim(H + H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H \cap H')$, c'est à dire $n - 1 = 2n - 2 + \dim(H \cap H')$.

Donc $\dim(H \cap H') = n - 1$. Or, $H \cap H' \subset H$ et $\dim(H \cap H') = n - 1 = \dim(H)$. Par inclusion + égalité des dimensions, on a $H = H \cap H'$. De même $H' = H \cap H'$, donc $H = H'$. Par double implication, on a

$\dim(H + H') = n - 1$ si, et seulement si, $H = H'$.

2. Si $H \neq H'$, alors d'après la question 1, $\dim(H + H') \neq n - 1$.

Or, $H + H'$ est un sous-espace vectoriel de E , donc $\dim(H) \leq n$. De plus, $H \subset H + H'$, donc $\dim(H) \leq \dim(H + H')$.

Finalement, $H + H'$ a une dimension qui est un entier compris entre n et $n - 1$, mais n'est pas $n - 1$. Donc $\dim(H + H') = n$. Comme $H + H' \subset E$ et $\dim(E) = n$, on en déduit que $E = H + H'$.

3. On applique la formule de Grassmann (E est bien de dimension finie), $\dim(H \cap H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H + H') = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.

On a bien $\dim(H \cap H') = n - 2$.

4. Comme H et H' sont de même dimension et différents, aucun n'est inclus dans l'autre. Ainsi, on peut prendre $v_1 \in H \setminus H'$ et $v_2 \in H' \setminus H$.

On pose $v = v_1 + v_2$ et $D = \text{Vect}(v)$. Alors D est de dimension 1, donc $\dim(D) + \dim(H) = 1 + n - 1 = n = \dim(E)$.

Soit $x \in H \cap D$. Alors $x = \lambda v_1 + \lambda v_2$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$.

Supposons que $\lambda \neq 0$:

Alors $v_2 = \frac{1}{\lambda}x - v_1$. Comme x et v_1 sont dans H et que H est stable par combinaison linéaire, on en déduit que $v_2 \in H$, ce qui est absurde, donc $\lambda = 0$. Ainsi, $x = 0$.

On obtient donc que $D \cap H = \{0\}$, donc D et H sont supplémentaires dans E . Le même raisonnement sur H' montre que D et H' sont également supplémentaires dans E .

Autre méthode :

On considère une base de $H \cap H'$ ($e_1, \dots, e_{n-2}$). D'après le théorème de la base incomplète (E est toujours de dimension finie), on peut la compléter en une base $B = (e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1})$ de H et en une base $B' = (e_1, \dots, e_{n-2}, e'_{n-1})$ de H' .

On a $e_{n-1} \notin \text{Vect}(B') = H'$. En effet, dans le cas contraire, on aurait que $B \in \text{Vect}(B')$ et donc que $H \subset H'$, soit $H = H'$ par égalité de leur dimension. De même, $e'_{n-1} \notin \text{Vect}(B) = H$.

On pose $a = e_{n-1} + e'_{n-1}$. Alors $a \notin H$. En effet, si $a \in H$, alors $e_{n-1} + e'_{n-1} - e_{n-1} \in H$ car H est un espace vectoriel, donc $e'_{n-1} \in H$, ce qui est absurde.

Donc $(e_1, \dots, e_{n-1}, a)$ est une famille de libre de cardinal n , donc une base de E . On en déduit que $\text{Vect}((e_1, \dots, e_{n-1})) = H$ et $\text{Vect}((a))$ sont supplémentaires dans E . De même, $\text{Vect}((e_1, \dots, e_{n-2}, e'_{n-1})) = H'$ et $\text{Vect}((a))$ sont supplémentaires dans E . Donc

$\text{Vect}((a))$ est un supplémentaire commun à H et H' dans E .

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!