

EXERCICES — CHAPITRE 23

Exercice 1 (♣) – Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble donné est un sous-espace vectoriel de E , où E est un espace vectoriel à préciser (que la réponse soit oui ou non, une justification est évidemment attendue).

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = x^2\}$
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x = y\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x + 1\}$
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x\}$
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$
6. F_6 l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = 0$.
7. F_7 l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$.
8. F_8 l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(0) = f'(1)$.
9. F_9 l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\int_0^1 f(t) \sin(t) dt = 0$.
10. F_{10} l'ensemble des suites réelles croissantes.
11. F_{11} l'ensemble des suites réelles monotones.
12. F_{12} l'ensemble des suites réelles bornées.
13. F_{13} l'ensemble des suites réelles convergeant vers 2.
14. F_{14} l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.
15. F_{15} l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

16. $F_{16} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X\tilde{P}(1) + (X^2 - 4)\tilde{P}(0) = 0\}$.
17. $F_{17} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^T + 2M = I_n\}$.
18. $F_{18} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^T + M = 0\}$.
19. $F_{19} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}$.
20. $F_{20} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$

Exercice 2 (♣) – Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3 (♥) – Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\omega \cdot \mathbb{R} = \{\omega x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\omega \cdot \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

À quelle condition $\omega \cdot \mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel?

Exercice 4 (♥) – Soit $x = (1, -1, 2, -2)$ et $y = (4, 3, 2, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}(x, y)$.
Déterminer à quelles conditions sur les réels a, b, c, d le vecteur (a, b, c, d) appartient à F .

Exercice 5 (♣) – Dans chacun des cas suivants, dire si le vecteur u est une combinaison linéaire des vecteurs v_1 et v_2 (et éventuellement v_3) dans l'espace vectoriel E .

E	u	v_1	v_2	v_3
$\mathbb{R}^2$	$(7, 3)$	$(2, 4)$	$(-1, 2)$	
$\mathbb{R}^3$	$(5, 5, 1)$	$(2, 3, 0)$	$(3, 2, 0)$	
$\mathbb{R}^3$	$(0, -2, 3)$	$(2, 2, 3)$	$(3, -1, 2)$	
$\mathbb{R}^2$	$(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$	$(1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{3}, 1)$	
$\mathbb{R}[X]$	$16X^3 - 7X^2 - 4 + 21X$	$8X^3 - 5X^2 + 1$	$X^2 + 7X - 2$	
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$x \mapsto \sin(2x)$	$\sin$	$\cos$	
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$x \mapsto \cos(2x)$	$\sin^2$	$\cos^2$	
$\mathbb{R}^3$	$(1)_{n \in \mathbb{N}}$	$(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$	$(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(2n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 6 (♥) – Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 2 \text{ et } 2x + y + 2z = 1\}$.
2. $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 1\}$.
3. $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 2 \text{ et } f(1) = -3\}$.
4. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(k) = k\}$.
5. $\{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} y'(x) + y(x) = 1\}$.

Exercice 7 (♥) – Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - z + 2t = 0\}$. Démontrer que F est un espace vectoriel en donnant deux vecteurs u et v non colinéaires de $\mathbb{R}^4$ pour lesquels $F = \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 8 (♥) – Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X\tilde{P}(1) + (X^2 - 4)\tilde{P}(0) = 0\}$. Écrire F comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 9 (♥) –

1. Trouver deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que l'ensemble E des suites réelles vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ soit égal à $\text{Vect}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$.
2. Écrire $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), f'' - f' + f = 0\}$ sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de fonctions.

Exercice 10 (♥) – Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(2, 4, 1)$ et $(0, -1, 3)$.

Exercice 11 (♥) – On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

Montrer que $\text{Vect}(A, B) = \text{Vect}(C, D)$.

Exercice 12 (♥) – Soit E un espace vectoriel et x_1, x_2, x_3 trois vecteurs de E . On pose

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = x_1 + x_2, \quad y_3 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

Montrer que $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3) = \text{Vect}(y_1, y_2, y_3)$.

Exercice 13 (♠) – Dans $\mathbb{R}^n$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 2, \dots, n)$ et le sous-ensemble $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14 (♠) – Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \mathbb{R}_0[X]$ et $G = \{(X-1)Q(X) \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 (♥) – On appelle I l'ensemble constitué des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P celui des fonction paires.

Montrer que ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 16 (♠) – On définit

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}.$$

1. Justifier que E est un espace-vectoriel.
2. On définit F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergeant vers 0. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 17 (♣) – Les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(\cos)$ et $G = \text{Vect}(\sin)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-ils en somme directe?

Exercice 18 (♠) – On considère

$$F = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}, \quad G = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$$

Montrer que F et $\mathbb{C}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que G et $\mathbb{C}_1[X]$ sont également supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$.

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!