

EXERCICES — CHAPITRE 23

Solution 1 –

1. F_1 n'est pas un sous-espace vectoriel.
En effet, $(1, 1) \in F_1$, mais $(1, 1) + (1, 1) = (2, 2)$ et $(2, 2) \notin F_1$, donc F_1 n'est pas stable par addition.
2. F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :
 - ▷ $F_2 \subset \mathbb{R}^2$.
 - ▷ $(0, 0) \in F_2$.
 - ▷ $\forall (x, y), (x', y') \in F_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $x = y$ et $x' = y'$. Donc $\lambda x + x' = \lambda y + y'$ et $\lambda(x, x') + (y, y') \in F_2$.
3. F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, $(0, 0, 0) \notin \mathbb{R}^3$.
4. F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, c'est une sous-partie de $\mathbb{R}^3$, $(0, 0, 0) \in F_4$, pour tout (x, y, z) et $(x', y', z') \in F_4, \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$. Or, comme (x, y, z) et $(x', y', z') \in F_4$, on a $\lambda y + y' = \lambda 3x + 3x' = 3(\lambda x + x')$, donc $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') \in F_4$.
5. En posant $F'_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } z = 2x\}$, on montre comme dans la question précédente que F'_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Comme $F_5 = F_4 \cap F'_4$ et que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, F_5 est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. F_6 est inclus dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. La fonction nulle est dans F_6 . Soient f et g dans $F_6, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $(\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0$. Donc $\lambda f + g \in F_6$. Finalement, F_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
7. F_7 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, car il ne contient pas la fonction nulle.
8. F_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet : F_8 est une partie de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction nulle est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est constante, donc elle appartient à F_8 . Soient $f, g \in F_8, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = \lambda f'(1) + g'(1) = (\lambda f + g)'(1)$. Donc $\lambda f + g \in F_8$.

9. F_9 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. En effet : F_9 est une partie de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. La fonction nulle est continue et $\int_0^1 0 = 0$, donc elle appartient à F_9 . Soient $f, g \in F_9, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est continue sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 (\lambda f + g)(t) \sin(t) dt = \lambda \int_0^1 f(t) \sin(t) dt + \int_0^1 g(t) \sin(t) dt = 0$. Donc $\lambda f + g \in F_9$.
10. F_{10} n'est pas un espace vectoriel. En effet, $(n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_{10}$ mais $-1.(n)_{n \in \mathbb{N}} = (-n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F_{10}$.
11. F_{11} n'est pas un espace vectoriel. En effet : On pose u la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 3$ puis $\forall k \geq 3, u_k = 3$. u est croissante donc appartient à F_{11} . On pose v la suite définie par $v_0 = 0, v_1 = -1, v_2 = -3$ puis $\forall k \geq 3, v_k = -3$. v est décroissante donc appartient à F_{11} . Soit $w = u + v$. Alors $w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 0$ et pour $k \geq 3, w_k = 0$. $w_0 < w_1$ et $w_1 > w_2$. Donc w n'est pas monotone et n'appartient pas à F_{11} .
12. F_{12} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet : $F_{12} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle est bien bornée. Soient u et v dans F_{12} et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe m_u et m_v réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq m_u$ et $|v_n| \leq m_v$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, |\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| |u_n| + |v_n| \leq |\lambda| m_u + m_v$. Donc $\lambda u + v$ est bornée, donc appartient à F_{12} .
13. F_{13} n'est pas un espace vectoriel car la suite nulle ne converge pas vers 2.
14. F_{14} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet : $F_{14} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle converge vers 0 donc appartient à F_{14} . Soient u et v dans F_{14} et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + v$ converge vers $\lambda 0 + 0 = 0$, donc $\lambda u + v \in F_{14}$.
15. F_{15} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet : $F_{15} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite nulle. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, \theta_{n+2} = 0$ et $4\theta_{n+1} - 4\theta_n = 0$, donc $\theta_{n+2} = 4\theta_{n+1} - 4\theta_n$. Ainsi, $\theta \in F_{15}$. Soient u et v dans $F_{15}, \lambda \in \mathbb{R}$. On pose $w = \lambda u + v$. Montrons que $w \in F_{15}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(4u_{n+1} - 4u_n) + (4v_{n+1} - 4v_n) \\ &= (4\lambda u_{n+1} + 4v_{n+1}) - (4\lambda u_n + 4v_n) \\ &= 4(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - 4(\lambda u_n + v_n) \\ &= 4w_{n+1} - 4w_n \end{aligned}$$

Donc $w \in F_{15}$.

16. F_{16} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. En effet :

$$F_{16} \subset \mathbb{R}[X].$$

On note θ le polynôme nul. Alors,

$$X\tilde{\theta}(1) + (X^2 - 4)\tilde{\theta}(0) = 0X + 0(X^2 - 4) = 0. \text{ Donc } \theta \in F_{16}.$$

Soient P et Q dans F_{16} , $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $R = \lambda P + Q$.

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\tilde{R}(a) = \lambda \tilde{P}(a) + \tilde{Q}(a)$. Donc,

$$\begin{aligned} X\tilde{R}(1) + (X^2 - 4)\tilde{R}(0) &= X(\lambda \tilde{P}(1) + \tilde{Q}(1)) + (X^2 - 4)(\lambda \tilde{P}(0) + \tilde{Q}(0)) \\ &= [X\lambda \tilde{P}(1) + (X^2 - 4)\lambda \tilde{P}(0)] + [X\tilde{Q}(1) + (X^2 - 4)\tilde{Q}(0)] \\ &= \lambda [X\tilde{P}(1) + (X^2 - 4)\tilde{P}(0)] + [X\tilde{Q}(1) + (X^2 - 4)\tilde{Q}(0)] \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $R \in F_{16}$.

17. F_{17} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, on peut facilement vérifier que la matrice nulle n'est pas dans F_{17} .

18. F_{18} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet,

$$F_{18} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Si M est la matrice nulle, alors $M^T + M = 0$, donc $M \in F_{18}$.

Soient A et B dans F_{18} , $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $C = \lambda A + B$.

Alors, par propriété de la transposition,

$$C^T + C = \lambda A^T + B^T + \lambda A + B = \lambda(A^T + A) + (B^T + B) = 0$$

Donc $C \in F_{18}$.

19. F_{19} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En effet, on vérifie facilement que $I_3 \in F_{19}$, mais $2I_3 \notin F_{19}$, donc F_{19} n'est pas stable par multiplication externe.

20. On peut écrire

$$F_{20} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

donc F_{20} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution 2 – $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0 = (0)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = n \cdot 0 + 0$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n) \in F$. On a

$$\lambda(u_n)(v_n) = (\lambda u_n + v_n)$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(nu_{n+1} + u_n) + (nv_{n+1} + v_n) = n(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + \lambda u_n + v_n$$

donc $\lambda(u_n) + (v_n) \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Solution 3 – $\omega\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $0 \in \omega\mathbb{R}$ car $0 = \omega \times 0$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z, z' \in \omega\mathbb{R}$ on peut écrire $z = \omega x$ et $z' = \omega x'$ avec $x, x' \in \mathbb{R}$ et on a $(\lambda z + z') = \omega(\lambda x + x')$ avec $\lambda x + x' \in \mathbb{R}$ donc $\lambda z + z' \in \omega\mathbb{R}$.

Ainsi $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Si $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ alors puisque $\omega = \omega \times 1 \in \omega\mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$, on a $i \cdot \omega \in \omega\mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $\omega = 0$.

Inversement, si $\omega = 0$ alors $\omega\mathbb{R} = \{0\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Solution 4 – Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$(a, b, c, d) \in F \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + 4y = a \\ -x + 3y = b \\ 2x + 2y = c \\ -2x + y = d \end{cases}$$

Appliquons la méthode de Gauss à ce dernier système.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \boxed{1}x + 4y = a \\ -x + 3y = b \\ 2x + 2y = c \\ 2x + y = d \end{cases} &\iff \begin{cases} \boxed{1}x + 4y = a \\ -\boxed{7}y = a + b \\ 9y = 2a + d \end{cases} &\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + 2L_1 \end{aligned} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{7}x = 3a - 4b \\ \boxed{7}y = a + b \\ 0 = -8a + 6b + 7c \\ 0 = 5a - 9b + 7d \end{cases} &\begin{aligned} L_1 &\leftarrow 7L_1 - 4L_2 \\ L_3 &\leftarrow 7L_3 + 6L_2 \\ L_4 &\leftarrow 7L_4 - 9L_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

On peut toujours trouver x et y tels que les deux premières lignes soient vérifiées. Ainsi, pour que le système admette des solutions, il faut et il suffit que les deux dernières lignes soient vraies.

$$\text{Donc } F = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -8a + 6b + 7c = 0 \\ 5a - 9b + 7d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Solution 5 –

1.

$$\begin{aligned} (7, 3) \in \text{Vect}((2, 4), (-1, 2)) &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (7, 3) = \lambda(2, 4) + \mu(-1, 2) \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} 7 = 2\lambda - \mu \\ 3 = 4\lambda + 2\mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{45}{8} = \lambda \\ \frac{17}{4} = \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $(7, 3)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(2, 4)$ et $(-1, 2)$.

2. Il est facile de voir que non, car toute combinaison linéaire des vecteurs $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$ a 0 pour troisième coordonnée.

3.

$$\begin{aligned} (0, -2, 3) \in \text{Vect}((2, 2, 3), (3, -1, 2)) &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (0, -2, 3) = \lambda(2, 2, 3) + \mu(3, -1, 2) \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 = 2\lambda + 3\mu \\ -2 = 2\lambda - \mu \\ 3 = 3\lambda + 2\mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{1}{2} = \mu \\ -2 = 2\lambda - \mu \\ \frac{-1}{7} = \lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{1}{2} = \mu \\ -2 = \frac{-11}{14} \\ \frac{-1}{7} = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'ayant pas de solution, $(0, -2, 3)$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $(2, 2, 3)$ et $(3, -1, 2)$.

4. On peut résoudre un système comme précédemment, ou repérer directement que

$$(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})6\sqrt{2}(1, \sqrt{2}) - 5\sqrt{3}(\sqrt{3}, 1)$$

Ainsi, $(6\sqrt{2} - 15, 12 - 5\sqrt{3})$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{3}, 1)$.

5. En observant les coefficients de degré 3 et 1, on voit que la seule combinaison linéaire de v_1 et v_2 qui pourrait donner u est $2v_1 + 3v_2$. Après calcul, on a que $2v_1 + 3v_2 = u$, donc u est bien une combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

6. Si $u = \lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ et réels, en évaluant cette relation en 0, on obtient $\lambda = 0$, puis en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\mu = 0$, donc $f = 0$, ce qui est absurde. Donc u n'est pas une combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$.

7. D'après le formulaire de trigonométrie, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$$

donc u est bien une combinaison linéaire de $\cos^2$ et $\sin^2$.

8. Supposons qu'il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 = \lambda n^2 + \mu 2^n + \nu(2n - 1)$$

Si $\nu \neq 0$, alors, par croissances comparées, $1 \sim \mu 2^n$, ce qui est absurde car ces deux suites n'ont pas la même limite. Donc $\nu = 0$.

Ainsi, si $\lambda \neq 0$, $1 \sim \lambda n^2$, ce qui est de nouveau absurde pour des raisons de limites. Donc $\lambda = 0$.

On a donc $1 = \nu(2n - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En évaluant en $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\nu = -1$ et $\nu = 1$, ce qui est absurde.

Donc, $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une combinaison linéaire des suites $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution 6 – On rappelle qu'un sous-ensemble A d'un espace vectoriel E est un sous-espace affine s'il existe un sous-espace vectoriel V de E et un point $a \in E$ tels que

$$A = a + V.$$

1. Considérons

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 2 \text{ et } 2x + y + 2z = 1\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des solutions d'un système linéaire non homogène.

On commence par résoudre le système homogène associé :

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

On obtient $y = -x - z$, puis $x = 0$, donc $y = -z$. Ainsi,

$$V = \{(0, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(0, -1, 1)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Une solution particulière du système non homogène (i.e avec second membre) est par exemple $(1, 0, 1)$. On en déduit

$$A = (1, 0, 1) + V.$$

Donc A est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ (c'est une droite de l'espace).

2. Considérons

$$A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 1\}.$$

Par linéarité de la trace, l'ensemble

$$V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En notant I_n la matrice identité, on a $\text{tr}(I_n) = n$, donc

$$A = \frac{1}{n} I_n + V.$$

Ainsi, A est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Considérons

$$A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 2 \text{ et } f(1) = -3\}.$$

Posons

$$V = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}.$$

On montre facilement que V est un sous-espace vectoriel.

La fonction affine $f_0(x) = 2 - 5x$ vérifie $f_0(0) = 2$ et $f_0(1) = -3$. Ainsi,

$$A = f_0 + V,$$

et A est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Considérons

$$A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(k) = k\}.$$

Soit

$$V = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(k) = 0\}.$$

On montre facilement que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Il existe un unique polynôme P_0 de degré $\leq n-1$ tel que $P_0(k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (polynôme d'interpolation de Lagrange). On a alors

$$A = P_0 + V.$$

Donc A est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$.

5. Considérons

$$A = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} y'(x) + y(x) = 1\}.$$

Considérons d'abord l'équation homogène associée :

$$e^{x^2} y' + y = 0.$$

Elle admet pour solutions

$$\{y : x \mapsto C e^{-\int_0^x e^{-t^2} dt}, \quad C \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto C e^{-\int_0^x e^{-t^2} dt}).$$

L'ensemble

$$V = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x, e^{x^2} y'(x) + y(x) = 0\}$$

est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation non homogène (i.e avec second membre). La fonction constante $y_0 : x \mapsto 1$ est solution.

Ainsi,

$$A = y_0 + V.$$

On en conclut que A est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution 7 – Pour cela, nous allons chercher à obtenir une représentation paramétrique de F . Soit $M(x, y, z, t)$ un élément de $\mathbb{R}^4$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in F &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z + t = -\lambda - \mu \\ -z + 2t = -\lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda - \mu - t \\ 3t = -2\lambda - \mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\mu \\ t = -\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

avec u de coordonnées $\left(1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ et v de coordonnées $\left(0, 1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
 u et v ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{\text{Vect}(u, v) = F \text{ est un plan vectoriel}}.$

Solution 8 – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $P \in F \iff \begin{cases} \tilde{P}(0) = 0 \\ \tilde{P}(1) = 0 \\ -4\tilde{P}(0) = 0 \end{cases}$

Ainsi, P est dans F si et seulement si 0 et 1 sont des racines de P , c'est à dire si et seulement si P est divisible par $X(X-1) = X^2 - X$ soit si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X$ est nul.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors il existe a, b, c, d réels tels que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Effectuons la division euclidienne de P par $X^2 - X$:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} aX^3 + bX^2 + cX + d \\ -aX^3 + aX^2 \\ \hline (a+b)X^2 + cX + d \\ -(a+b)X^2 + (a+b)X \\ \hline (a+b+c)X + d \end{array} & \begin{array}{l} X^2 - X \\ aX + (a+b) \end{array} \end{array}.$$

Ainsi, $P \in F$ si et seulement si $d = 0$ et $c = -a - b$, c'est à dire si et seulement si $P = (X^2 - X)(aX + a + b)$.

$$\begin{aligned} (X^2 - X)(aX + a + b) &= aX^3 - aX^2 + aX^2 - aX + bX^2 - bX \\ &= a(X^3 + X) + b(X^2 - X) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{F = \text{Vect}(X^3 + X, X^2 - X)}.$

Solution 9 –

1. Recherchons quelles sont les suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont les racines sont 3 et 1 (Très facile avec un système produit-somme).

Ainsi, les suites vérifiant cette relation de récurrence sont les suites de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 3^n + \beta 1^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Donc, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = 3^n$ et $b_n = 1$, on obtient que u vérifie la relation de récurrence si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tels que

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \alpha (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Donc $\boxed{E = \text{Vect}((3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (1)_{n \in \mathbb{N}})}.$

2. L'équation caractéristique associée à $f'' - f' + f = 0$ est $r^2 - r + 1 = 0$, d'inconnue r . Son discriminant est $\Delta = -3$. Ses racines sont $r_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Donc, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$E = \left\{ f: \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{t/2} \left(\lambda \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}. \text{ Donc,}$$

$$E = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}, \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{array} \right)$$

Solution 10 – Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x, y, z) \in \text{Vect}((2, 4, 1), (0, -1, 3)) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(2, 4, 1) + \mu(0, -1, 3)$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4\lambda - \mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x/2 = \lambda \\ 2x - y = \mu \\ z = x/2 + 3(2x - y) \end{cases}$$

Il existe toujours λ et μ tels que les deux premières lignes soient vérifiées, donc

$$(x, y, z) \in \text{Vect}((2, 4, 1), (0, -1, 3)) \iff \frac{13}{2}x + 3y - z = 0$$

Cette dernière équation est donc une équation caractérisant $\text{Vect}((2, 4, 1), (0, -1, 3))$.

Solution 11 – On remarque que $C = A + B$ et $D = A - B$, donc A et B appartiennent à $\text{Vect}(C, D)$. Comme c'est un espace vectoriel, on en déduit que $\text{Vect}(A, B) \subset \text{Vect}(C, D)$.

De même $A = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$ et $B = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D$, donc C et D appartiennent à $\text{Vect}(A, B)$. Comme c'est un espace vectoriel, on en déduit que $\text{Vect}(C, D) \subset \text{Vect}(A, B)$.

Par double inclusion, $\text{Vect}(C, D) = \text{Vect}(A, B)$.

Solution 12 –

Par définition, $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \text{Vect}(x_1, x_2, x_3)$, donc $\text{Vect}(y_1, y_2, y_3) \subset \text{Vect}(x_1, x_2, x_3)$.

Réciproquement : $x_3 = y_2 - y_1$, $x_1 = y_3 + y_1 - 2y_2$ et $x_2 = -y_3 - y_1 + 3y_2$. Donc $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \text{Vect}(y_1, y_2, y_3)$, donc $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3) \subset \text{Vect}(y_1, y_2, y_3)$.

Par double inclusion, $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3) = \text{Vect}(y_1, y_2, y_3)$.

Solution 13 – Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

▷ $G \subset \mathbb{R}^n$.

▷ $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ car $0 + 0 + \dots + 0 = 0$.

▷ Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$.

$\lambda x_1 + y_1 + \dots + \lambda x_n + y_n = \lambda(x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n) = \lambda 0_{\mathbb{R}^n} + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $\lambda x + y \in G$.

Montrons par analyse-synthèse que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Analyse : Supposons que $x = f + g$ avec $f = (f_1, \dots, f_n) \in F$ et

$g = (g_1, \dots, g_n) \in G$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(f_1, \dots, f_n) = (\lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda)$.

Comme $g \in F$, on a $g_1 + \dots + g_n = 0$. Donc

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= f_1 + g_1 + f_2 + g_2 + \dots + f_n + g_n \\ &= (f_1 + \dots + f_n) + (g_1 + \dots + g_n) \\ &= (\lambda + 2\lambda + \dots + n\lambda) + 0 \\ &= \lambda \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i}{n(n+1)} &= \lambda \end{aligned}$$

Ainsi, $f = \lambda \cdot (1, 2, \dots, n)$ et $g = x - f$. Donc, s'il existe, le couple (f, g) tel que $f \in F$, $g \in G$ et $x = f + g$ est unique.

Synthèse : On pose $\lambda = \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i}{n(n+1)}$, $f = \lambda \cdot (1, 2, \dots, n)$ et $g = x - f$.

1. $f \in \text{Vect}(\{(1, 2, \dots, n)\}) = F$.
2. $f + g = f + x - f = x$.
3. $g = x - f = (x_1 - \lambda, x_2 - 2\lambda, \dots, x_n - n\lambda)$.

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda + x_2 - 2\lambda + \dots + x_n - n\lambda &= (x_1 + \dots + x_n) - (\lambda + 2\lambda + \dots + n\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i - \lambda \sum_{i=1}^n i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i - \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $g \in G$.

Conclusion : On a donc montré que tout élément de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G , donc

F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Solution 14 –

▷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un unique $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)(X-1) + R$ et $\deg(R) < \deg(X-1)$.

$\deg(R) < 1$ donc $R \in \mathbb{R}_0[X] = F$. Comme $Q(X)(X-1) \in G$, on a montré que $F + G = \mathbb{R}[X]$.

▷ Soit $P \in F \cap G$. $P \in G$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X)(X-1)$. Donc $\deg(P) = 1 + \deg(Q)$. Or $P \in F$, donc $\deg(P) \leq 0$, d'où

$\deg(Q) = -\infty$. Donc $Q = 0$ et $P = 0$. On a donc $F \cap G \subset \{0\}$. $0 \in F \cap G$ car $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, donc $F \cap G = \{0\}$.

Par caractérisation des supplémentaires, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution 15 – Procédons par analyse-synthèse.

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Analyse : Supposons que $f = p + i$ avec $p \in P$ et $i \in I$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$.

Donc $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, si p et i existent, elles sont déterminées de manière unique.

Synthèse : On pose

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}, \quad i: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$. Donc $p + i = f$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$. Donc $p \in P$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$. Donc $i \in I$.

Conclusion : f se décompose de manière unique comme d'un élément de P et d'un élément de I . Ceci étant vrai pour toute $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, P et I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}$.

Solution 16 –

1. E est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et contient la suite nulle.

Une combinaison linéaire de suite convergentes est aussi une suite convergente d'après le cours sur les suites, donc E est stable par combinaison linéaire.

E est donc un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc un espace vectoriel.

2. Soit u une suite convergente. On note λ sa limite.

- En posant v la suite constante égale à λ et $w = u - \lambda$, on a que $u = v + w$, que $v \in F$ et que w converge vers 0 par opération sur les limites, donc appartient à G .
- Réciproquement, si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$, alors en passant à la limite, on en déduit que $\lim v = \lim u$, donc v est la suite constante égale à λ et $w = u - \lambda$, donc u et v sont déterminées de manière unique.

Finalement, tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , donc $E = F \oplus G$.

Solution 17 – Soit $f \in \text{Vect}(\cos) \cap \text{Vect}(\sin)$. Alors il existe λ et μ des réels tels que $f = \lambda \cos = \mu \sin$. En évaluant en 0, on trouve $\lambda = 0$, d'où l'on déduit que f est la fonction nulle. Par caractérisation des sommes directes, F et G sont en somme directe.

Solution 18 – • Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne, on peut écrire $P = (X - 1)^2 Q + R$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $R \in \mathbb{C}_1[X]$. Comme $(X - 1)^2 Q \in F$, on a que $P \in F + \mathbb{C}_1[X]$. D'où $\mathbb{C}[X] \subset F + \mathbb{C}_1[X]$. L'inclusion réciproque est immédiate, donc $\mathbb{C}[X] = F + \mathbb{C}_1[X]$.

Soit $P \in F \cap \mathbb{C}_1[X]$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $P = aX + b$.

Comme $P'(1) = 0$, on a $a = 0$ puis avec $P(1) = 0$, on a $b = 0$. Donc $P = 0$.

Réciproquement, le polynôme nul est bien dans $F \cap \mathbb{C}_1[X]$ car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. Donc $F \cap \mathbb{C}_1[X] = \{0\}$.

Par caractérisation des supplémentaires, F et $\mathbb{C}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$.

• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne, on peut écrire $P = (X + 1)(X - 1)Q + R$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $R \in \mathbb{C}_1[X]$. Comme $(X + 1)(X - 1)Q \in G$, on a que $P \in G + \mathbb{C}_1[X]$. D'où $\mathbb{C}[X] \subset G + \mathbb{C}_1[X]$. L'inclusion réciproque est immédiate, donc $\mathbb{C}[X] = G + \mathbb{C}_1[X]$.

Soit $P \in G \cap \mathbb{C}_1[X]$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $P = aX + b$.

Comme $P(1) = 0$, on a $a + b = 0$ puis avec $P(-1) = 0$, on a $-a + b = 0$. On en déduit facilement que $a = b = 0$ et donc $P = 0$.

Réciproquement, le polynôme nul est bien dans $G \cap \mathbb{C}_1[X]$ car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. Donc $G \cap \mathbb{C}_1[X] = \{0\}$.

Par caractérisation des supplémentaires, G et $\mathbb{C}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!