

EXERCICES — CHAPITRE 22

Exercice 1 (♦) – Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des fonctions suivantes :

Fonctions	n	a	Fonctions	n	a
$f_1 : x \mapsto \sqrt{4+x}$	3	0	$f_2 : x \mapsto \sin(x) [\cos(x) - 1]$	5	0
$f_3 : x \mapsto \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	6	0	$f_4 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	3	0
$f_5 : x \mapsto \ln(2+\sin(x))$	4	0	$f_6 : x \mapsto \exp(\sqrt{1+x})$	3	0
$f_7 : x \mapsto \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1+x^2}}$	4	0	$f_8 : x \mapsto \cos^2(x)$	6	0
$f_9 : x \mapsto \frac{1}{x}$	4	2	$f_{10} : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\exp(x)}$	2	0
$f_{11} : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$	3	0	$f_{12} : x \mapsto \cos(x)$	4	$\frac{\pi}{3}$
$f_{13} : x \mapsto \frac{\exp(x)}{x}$	3	2	$f_{14} : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$	2	0
$f_{15} : x \mapsto \frac{\exp(2x)}{1+\ln(1+x)}$	2	0	$f_{16} : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{\ln(1-x)}$	3	0
$f_{17} : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$	4	0	$f_{18} : x \mapsto \int_x^x \sqrt{1+t^2} dt$	4	0
$f_{19} : x \mapsto \ln(x)$	4	e	$f_{20} : x \mapsto (e^x - 1) \sin(x)$	4	0
$f_{21} : x \mapsto (1+x)^{1/x}$	3	0	$f_{22} : x \mapsto \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$	5	0
$f_{23} : x \mapsto \ln(x)^2$	2	3	$f_{24} : x \mapsto \sqrt{3x} - \sqrt{3+x}$	3	1

Exercice 2 (♦) – Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x \operatorname{ch}(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos(x) + \frac{1}{2} \sin^2(x) \right)^{\frac{1}{x^4}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x},$$

Exercice 3 (♥) – On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{1 + \ln(1+x^2)}$ et F la primitive de f qui vaut 1 en 0. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de F .

Exercice 4 (♥) –

- Donner le développement limité de $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 3.
- En déduire une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f en au point d'abscisse 0, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 5 (♥) – Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'équation de la tangente au point d'abscisse a indiqué, et trouver la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage du point a .

- $f : x \mapsto \sin^2(x) - \frac{x^2}{1+x^2}, a = 0.$
- $f : x \mapsto \sin(x) + \arcsin(x), a = 0.$
- $f : x \mapsto \sqrt{3x} - \sqrt{3+x}, a = 1.$

Exercice 6 (♥) – On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement, noté encore f , est dérivable en 0. Préciser la valeur de $f'(0)$, une équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 7 (♥) – Montrer que les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité en 0, et étudier la dérivabilité en 0 des fonctions ainsi définies.

- $x \mapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right);$
- $x \mapsto \frac{1}{x^2} \ln(\cos x);$
- $x \mapsto \frac{\cos(2x^2) - 1}{x^2};$
- $x \mapsto \ln\left(\frac{1 - \cos(3x)}{x^2}\right);$
- $x \mapsto \exp\left(\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x}\right);$
- $x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{2}}.$

Exercice 8 (♥) – Étudier l'existence d'asymptotes et la position de la courbe par rapport à ces asymptotes pour la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}.$$

Exercice 9 (♦) – Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer une équation de la droite asymptote à la courbe représentative de la fonction et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

- $f : x \mapsto \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} e^{-1/x}$
- $g : x \mapsto (2x + 1) e^{\frac{1}{x-1}}$
- $h : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}.$

Exercice 10 (♥) – Déterminer un équivalent des suites de termes généraux suivants :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) & v_n &= n\left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ w_n &= e^{1/n} - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) & x_n &= \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Exercice 11 (♠) – Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a \ln(n) + b \ln(1+n) + c \ln(1+n^2).$$

Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquelles $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 12 (CCP PSI 2005) (♠) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$

1. Montrer que sur $]0, 1[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera u_n .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 0.
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Exercice 13 (♥) – Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite (x_n) .

Exercice 14 (♦) –

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$x + e^x = n$$

possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent de x_n .
3. Former un développement asymptotique à trois termes de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 15 (♠♦) – Donner le développement limité en 0 à l'ordre 10 de

$$u(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

En déduire le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $a + 2b + 5c = 10$.

Exercice 16 (♥) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que l'on a le développement asymptotique

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!