

EXERCICES — CHAPITRE 22

Solution 1 –

1. Pour tout x au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2\sqrt{1 + \frac{x}{4}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{x^2}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{x^3}{64} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{512} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. Pour tout x réel au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} \cos(x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Par produit, en éliminant les termes de degré plus grand que 5, on a :

$$\begin{aligned} f_2(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^5}{12} + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-x^3}{2} + \frac{x^5}{8} + o(x^5) \end{aligned}$$

3. Pour tout x réel au voisinage de 0, on a

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Comme $x^2 \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, on a

$$\sqrt{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + o(x^6)$$

On sait également que

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

Comme $-x^2 \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}(-x^2)^2 - \frac{5}{16}(-x^2)^3 + o(x^3)$$

En sommant, on a donc :

$$\begin{aligned} f_3(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + o(x^6)\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

4. Pour tout x au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ f_4(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + 2\frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

5. Pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{2}\right) \\ f_5(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)\right) \end{aligned}$$

En posant $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$, on a que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, donc

$$f_5(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + h(x) - \frac{h(x)^2}{2} + \frac{h(x)^3}{3} - \frac{h(x)^4}{4} + o(h(x)^4)$$

Comme $h \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on a que $o(h(x)^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^4)$. Donc, en développant et en éliminant les termes de degré supérieur à 4, on obtient

$$\begin{aligned} f_5(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{\frac{x^2}{4} - 2\frac{x^4}{24}}{2} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + \frac{5x^4}{192} + o(x^4) \end{aligned}$$

6. Pour tout x au voisinage de 0, on a

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

En posant $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$, on a que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, donc

$$f_6(x) = e \times \exp(h(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + h(x) + \frac{h(x)^2}{2} + \frac{h(x)^3}{6} + o(h(x)^3) \right)$$

Comme $h \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on a que $o(h(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$. Donc, en développant et en éliminant les termes de degré supérieur à 3, on obtient

$$\begin{aligned} f_6(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48} + o(x^3) \end{aligned}$$

7. Pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$(1+x)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Comme $x^2 \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, on a

$$(1+x^2)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

Par produit, on en déduit

$$\begin{aligned} f_7(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + 3x + 3x^2 + x^3) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{8}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

8. Pour tout x réel au voisinage de 0, on a

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6).$$

En mettant cela au carré, on n'écrit pas les termes de degré 7 ou plus puisque l'on cherche un D.L. à l'ordre 6 :

$$\begin{aligned} f_8(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 - 2 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^4}{24} - 2 \frac{x^6}{720} - 2 \frac{x^2}{2} \times \frac{x^4}{24} + o(x^6) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{32}{720}x^6 + o(x^6) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Autre méthode : On peut aussi réécrire $\cos(x)^2$ en $\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

9. Soit x réel au voisinage de 2.

$$\begin{aligned} f_9(x) &= \frac{1}{2+x-2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} \end{aligned}$$

$\frac{x-2}{2} \underset{x \rightarrow 2}{\rightarrow} 0$, donc en utilisant le D.L. à l'ordre 4 en 0 de $h \mapsto \frac{1}{1+h}$, on a

$$\begin{aligned} f_9(x) &\underset{x \rightarrow 2}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-2}{2} + \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-2}{2} \right)^3 + \left(\frac{x-2}{2} \right)^4 + o\left(\frac{x-2}{2} \right)^4 \right) \\ &\underset{x \rightarrow 2}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 + o((x-2)^4) \end{aligned}$$

10. En utilisant les développements limités de $\exp$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, on a que

$$\begin{aligned} f_{10}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 + x + o(x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) (1 - x + o(x)) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le D.L. à l'ordre 1 en 0 de $h \mapsto \frac{1}{1+h}$. En éliminant les termes de degré

supérieur à 2, on obtient

$$\begin{aligned} f_{10}(x) &=_{x \rightarrow 0} x - x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &=_{x \rightarrow 0} x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

11. On calcule la décomposition en éléments simples de cette fonction rationnelle. Pour tout x au voisinage de 0, on a

$$f_{11}(x) = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-2} = \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-(x/2)} \right).$$

En utilisant les D.L. à l'ordre 3 de $h \mapsto \frac{1}{1+h}$ et $h \mapsto \frac{1}{1-h}$, on a

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &=_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3} \left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) \right) \right) \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + o(x^3) \end{aligned}$$

12. Pour tout x réel au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, on a

$$\begin{aligned} f_{12}(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Comme $x - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} 0$, en utilisant les D.L. en 0 à l'ordre 4 de sin et cos, on obtient

$$\begin{aligned} f_{12}(x) &=_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(x - \frac{\pi}{3})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{3})^4}{24} + o((x - \frac{\pi}{3})^4) \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{(x - \frac{\pi}{3})^3}{6} + o((x - \frac{\pi}{3})^4) \right) \\ &=_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{48} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o((x - \frac{\pi}{3})^4) \end{aligned}$$

13. Pour tout x au voisinage de 2, on pose $h = x - 2$. On a alors

$$\begin{aligned} f_{13}(x) &= \frac{e^2}{2} \times \frac{e^h}{1+h/2} \\ &=_{h \rightarrow 0} \frac{e^2}{2} \times \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3) \right) \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3) \right) \\ &=_{h \rightarrow 0} \frac{e^2}{2} \times \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{24} + o(h^3) \right) \\ &=_{x \rightarrow 2} \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} (x-2) + \frac{e^2}{8} (x-2)^2 + \frac{e^2}{48} (x-2)^3 + o((x-2)^3) \end{aligned}$$

14. f_{14} est dérivable au voisinage de 0 et pour tout x au voisinage de 0, on a

$$f'_{14}(x) = \frac{\frac{2+x-(1+x)}{(2+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{(2+x)^2}}{\sqrt{\frac{(2+x)^2-(1+x)^2}{(2+x)^2}}} = \frac{\frac{1}{2+x}}{\sqrt{(2+x)^2-(1+x)^2}}.$$

Et en simplifiant le dénominateur, on obtient

$$f'_{14}(x) = \frac{1}{\frac{2+x}{\sqrt{3+2x}}} = \frac{1}{2+x} \times \frac{1}{\sqrt{3+2x}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2x}{3}}}$$

On est alors ramené à des développements connus :

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2x}{3}}} = \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{-1}{2} \times \frac{2x}{3} + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{3} + o(x)$$

Par produit, on en déduit

$$f'_{14}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{5x}{6} + o(x).$$

En intégrant, on a finalement

$$f_{14}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) + x - \frac{5x^2}{12} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{3} + x - \frac{5x^2}{12} + o(x^2).$$

15. Pour tout x au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

En posant $h(x) = \ln(1+x)$, on a que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, donc

$$\frac{1}{1+h(x)} = 1 - h(x) + h(x)^2 + o(h(x)^2).$$

Comme $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a que $o(h(x)^2) = o(x^2)$. Donc, en développant et en éliminant les termes de degré supérieur à 2, on obtient

$$\frac{1}{1+h(x)} = 1 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + x^2 + o(x^2) = 1 - x + \frac{3x^2}{2} + o(x^2).$$

On a donc

$$\begin{aligned} f_{15}(x) &= (1+2x + \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2))(1-x + \frac{3x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= 1+2x+2x^2-x-2x^2+\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \\ &= 1+x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

16. Pour tout x non-nul au voisinage de 0, on a

$$\cos(x) - 1 = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On peut ainsi simplifier par $-x$ dans le quotient :

$$\begin{aligned} f_{16}(x) &= \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\ &= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + o(x^2)\right) \\ &= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \end{aligned}$$

17. Pour tout x réel non-nul au voisinage de 0, on a

$$\operatorname{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5),$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5),$$

donc, on a

$$\begin{aligned} f_{17}(x) &= \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}{x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4)}{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)} \end{aligned}$$

En utilisant le D.L. à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto \frac{1}{1+h}$, on obtient

$$\begin{aligned} f_{17}(x) &= \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4)\right) \\ &\quad \times \left(1 - \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4\right) + \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4\right)^2 + o(x^4)\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4\right) \left(1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{360}x^4\right) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

18. On pose $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ définie au voisinage de 0. Alors, en utilisant le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en x^2 ,

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

On peut alors tronquer à l'ordre 3 pour avoir

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Puis, en notant G une primitive de g , on a

$$G(x) = G(0) + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).$$

$$G(x^2) = G(0) + x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^8) = G(0) + x^2 + o(x^4).$$

Ainsi,

$$f_{18}(x) = G(x^2) - G(x) = -x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

19. Pour tout x réel au voisinage de e , on a

$$\begin{aligned} f_{19}(x) &= \ln(x - e + e) \\ &= \ln(e) + \ln\left(1 + \left(\frac{x}{e} - 1\right)\right) \\ &= 1 + \ln\left(1 + \left(\frac{x}{e} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

$\frac{x}{e} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow e} 0$, On utilise alors le D.L. de $h \mapsto \ln(1 + h)$ en 0 à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} f_{19}(x) &\underset{x \rightarrow e}{=} 1 + \left(\frac{x}{e} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{e} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{e} - 1\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{e} - 1\right)^4 + o\left(\frac{x}{e} - 1\right) \\ &\underset{x \rightarrow e}{=} 1 + \frac{1}{e}(x - e) - \frac{1}{2e^2}(x - e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x - e)^3 \\ &\quad - \frac{1}{4e^4}(x - e)^4 + o((x - e)^4) \end{aligned}$$

20. Pour tout x réel au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Par produit, en éliminant les termes de degré plus grand que 4, on a :

$$\begin{aligned} f_{20}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

21. Pour tout x réel non-nul au voisinage de 0, on a :

$$f_{21}(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

On sait que

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4). \\ \frac{\ln(1+x)}{x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3). \end{aligned}$$

On sait que pour h réel au voisinage de 0, on a :

$$\exp(1+h) = e \times \exp(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} e \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right).$$

En posant $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$, on a que $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^3 + o(h(x)^3) \right] \end{aligned}$$

Comme $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x}{2}$, on a que $o(h(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$. Donc, en développant et en éliminant les termes de degré supérieur à 3, on obtient

$$\begin{aligned} f_{21}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + o(x^3) \end{aligned}$$

22. Pour tout x réel au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \operatorname{ch}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \end{aligned}$$

Comme, pour h réel au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{1+h} \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - h + h^2 + o(h^2)$$

En posant $h(x) = \operatorname{ch}(x) - 1$, on a $o(h(x)^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^4)$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \end{aligned}$$

Par produit, cela nous donne

$$\begin{aligned} f_{22}(x) &= (x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

23. Pour tout x au voisinage de 3, on a

$$\ln(x) = \ln(3(1 + \frac{x-3}{3})) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)$$

$$\ln(x) = \ln(3) + \frac{x-3}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + o((x-3)^2)$$

car $\frac{x-3}{3}$ converge vers 0 quand x tend vers 3. On en déduit que

$$\begin{aligned} f_{23}(x) &= \ln(3) + \frac{x-3}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + o((x-3)^2) \\ &= \ln(3)^2 + \frac{2\ln(3)}{3}(x-3) + \left(\frac{1}{9} - \frac{2\ln(3)}{18}\right)(x-3)^2 + o((x-3)^2) \\ &= \ln(3)^2 + \frac{2\ln(3)}{3}(x-3) + \frac{1-\ln(3)}{9}(x-3)^2 + o((x-3)^2) \end{aligned}$$

24. Pour tout x au voisinage de 1,

$$\begin{aligned} f_{24}(x) &= \sqrt{3}\sqrt{1+(x-1)} - 2\sqrt{1+\frac{x-1}{4}} \\ f_{24}(x) &= \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)\right) \\ &\quad - 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x-1}{4}\right)^3 + o((x-1)^3)\right) \\ &= \sqrt{3} - 2 + \frac{2\sqrt{3}-1}{4}(x-1) + \frac{1-8\sqrt{3}}{64}(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{32\sqrt{3}-1}{512}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

Solution 2 – • Pour tout x réel non-nul au voisinage de 0, on a

$$\sin(x) - x\cos(x) = x - \frac{x^3}{6} - x(1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x) = x + \frac{x^3}{6} - x(1 + \frac{x^2}{2}) + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)} &= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{-\frac{1}{6} + o(1)} \\ &= \frac{-1 + o(1)}{1 + o(1)} \end{aligned}$$

On rappelle qu'une fonction qui est un $o(1)$ en 0 converge vers 0 en 0, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)} = -1.$$

• Pour tout x réel non-nul au voisinage de 0, on pose

$$g(x) = \exp\left(\frac{\ln(\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)^2)}{x^4}\right).$$

On rappelle que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sin(x)^2 &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

En utilisant le développement de cos, cela donne

$$\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)^2 = 1 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4),$$

$$\ln(\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)^2) = \ln(1 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)).$$

Comme $\ln(1+h) = h + o(h)$, avec $h(x) = -\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$, on obtient

$$\ln(\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)^2) = -\frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

Finalement, on a donc

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(-\frac{1}{8} + o(1)\right),$$

Et en regardant la limite en 0, par continuité de $\exp$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \exp\left(-\frac{1}{8}\right).$$

• Pour tout x non-nul au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2}{x^2(x + o(x))^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)}$$

En passant à la limite, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$

• Pour tout x non-nul au voisinage de 0,

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) - \exp\left(\frac{\ln(1-x)}{-x}\right)}{x}$$

On a que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

D'où

$$\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

En appliquant cela en $-x$, on obtient

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

Donc

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{e - \frac{e}{2}x + o(x) - (e + \frac{e}{2}x + o(x))}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -e + o(1)$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x} = -e$.

Solution 3 – On cherche un développement limité de f à l'ordre 4 en 0 (car on va "gagner un ordre" en l'intégrant ensuite).

Pour tout x réel au voisinage de 0, on a

$$1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

$$1 + \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2).$$

En utilisant le D.L. à l'ordre 1 en 0 de $h \mapsto \frac{1}{1+h}$, on obtient

$$\frac{1}{1 + \ln(1+x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + (x^2 + o(x^2))} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2).$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) (1 - x^2 + o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

On intègre alors par rapport à x :

$$\begin{aligned} F(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \frac{1}{2 \times 3}x^3 - \frac{13}{24 \times 5}x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{120}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

car l'énoncé précise que $F(0) = 1$.

Solution 4 –

1. Pour x au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + o(x^3),$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Par produit, on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

2. On en déduit que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1 + x$.

Si l'on étudie la différence de f avec l'équation de sa tangente, on a donc

$$f(x) - (1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On en déduit que f est en-dessous de sa tangente en 0 à gauche et à droite de 0.

Solution 5 –

1. Soit x au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2(1 - x^2 + o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) - (x^2 - x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi, f admet une tangente d'équation $y = 0$ au point d'abscisse 0. Comme $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3}x^4$ et que cette quantité est positive, f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

2. Pour tout x au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + \frac{x^5}{12} + o(x^5) \end{aligned}$$

Ainsi, f admet une tangente d'équation $y = 2x$ au point d'abscisse 0. Comme $f(x) - 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^5}{12}$, f est au-dessus de sa tangente à droite de 0 et en-dessous à gauche.

3. D'après l'exercice 1,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \sqrt{3} - 2 + \frac{2\sqrt{3}-1}{4}(x-1) + \frac{1-8\sqrt{3}}{64}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

Ainsi, f admet une tangente d'équation $y = \sqrt{3} - 2 + \frac{2\sqrt{3}-1}{4}(x-1)$ au point d'abscisse 1.

1. Comme $f(x) - \left(\sqrt{3} - 2 + \frac{2\sqrt{3}-1}{4}(x-1)\right) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1-8\sqrt{3}}{64}(x-1)^2$ et que cette quantité est négative, f est en-dessous de sa tangente au voisinage de 1.

Solution 6 – Intuition : Comme on va diviser deux fois par x , on s'attend à "perdre deux ordres", donc on va commencer avec un D.L. à l'ordre 5 de $e^x - 1$.

Pour tout x réel non-nul,

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Donc, on a

$$\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right).$$

On pose $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Comme $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$, $h(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. De plus,

$$\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4 + o(h^4) \quad (1)$$

On calcule les puissances de h :

$$h(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$$

$$h(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$h(x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

En revenant à (1), cela donne après calcul

$$\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{2880}x^4 + o(x^4).$$

Et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x - \frac{1}{2880}x^3 + o(x^3).$$

f admet un D.L. à l'ordre 0 en 0, donc est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

Ce prolongement f a le même développement limité en 0, donc admet un D.L. d'ordre 1 en 0, donc est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{24}$.

Une équation de la tangente en 0 est donc

$$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{24}.$$

Si l'on étudie la différence de f avec l'équation de sa tangente, on a donc

$$f(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{24}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2880}x^3 + o(x^3).$$

On en déduit que f est au-dessus de sa tangente en 0 à gauche de 0 et en-dessous à droite de 0.

Solution 7 –

- On a $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{6} + o(x)$. Il s'ensuit que f est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$) et est dérivable ($f'(0) = -\frac{1}{6}$).
- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x)$, donc f est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$) et f est dérivable ($f'(0) = 0$).
- On a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2x^2 + o(x^2)$, d'où f prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$) et dérivable ($f'(0) = 0$).
- On a $1 - \cos(3x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{9x^2}{2} - \frac{27x^4}{8} + o(x^4)$, d'où $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(9) - \ln(2) - \frac{3x^2}{4}$, puis f prolongeable par continuité en 0 ($f(0) = \ln(9) - \ln(2)$) et dérivable ($f'(0) = 0$).
- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, d'où f prolongeable par continuité en 0 ($f(0) = 1$) et dérivable ($f'(0) = -\frac{1}{2}$).
- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + x$, donc f est prolongeable par continuité en 0 ($f(0) = \frac{1}{2}$) et dérivable ($f'(0) = 1$).

Solution 8 – Pour tout $x \neq 0$, on pose $h = \frac{1}{x}$. Alors

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{h} - 2\right)} = \frac{1}{h} \sqrt[3]{1 - 2h}.$$

On va étudier g : $\begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \frac{1}{h} \sqrt[3]{1 - 2h} \end{matrix}$. Par D.L. classique, on a

$$\sqrt[3]{1 - 2h} \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{3}(-2h) - \frac{1}{9}(-2h)^2 + o(h^2) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{2}{3}h - \frac{4}{9}h^2 + o(h^2).$$

$$g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} - \frac{2}{3} - \frac{4}{9}h + o(h).$$

h tend vers 0^+ lorsque x tend vers $+\infty$. En repassant à x , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - \frac{2}{3}$.

Comme $f(x) - (x - \frac{2}{3}) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{-4}{9x} + o(\frac{1}{x})$, la courbe représentative de f est en-dessous de son asymptote en $+\infty$.

De manière similaire, f admet la même asymptote en $-\infty$ et la courbe représentative de f est au-dessus de cette asymptote en $-\infty$.

Solution 9 –

- Pour tout $x > 0$, on pose $h = \frac{1}{x}$. Alors

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} + 2}{\frac{1}{h} + 1} e^{-h} = \frac{1}{h} \times \frac{1 - h + 2h^2}{1 + h} e^{-h}.$$

On va étudier k : $\begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \frac{1}{h} \times \frac{1 - h + 2h^2}{1 + h} e^{-h} \end{matrix}$. Par D.L. classique, on a

$$\frac{1 - h + 2h^2}{1 + h} \underset{h \rightarrow 0}{=} (1 - h + 2h^2)(1 - h + h^2 + o(h^2)) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - 2h + 4h^2 + o(h^2).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} k(h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} (1 - 2h + 4h^2 + o(h^2)) e^{-h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} (1 - 2h + 4h^2 + o(h^2)) \left(1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} \left(1 - 3h + \frac{13}{2}h^2 + o(h^2)\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} - 3 + \frac{13}{2}h + o(h) \end{aligned}$$

On remarque que h tend vers 0^+ lorsque x tend vers $+\infty$. En repassant à x , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - 3 + \frac{13}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - 3$. Comme $f(x) - (x - 3) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{13}{2} \frac{1}{x}$, qui est positif, la courbe représentative de f est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

2. Pour tout $x > 0$, on pose $h = \frac{1}{x}$. Alors,

$$g\left(\frac{1}{h}\right) = \left(\frac{2}{h} + 1\right) \exp\left(\frac{1}{\frac{1}{h} - 1}\right) = \left(\frac{2}{h} + 1\right) \exp\left(\frac{h}{1 - h}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{2}{h} + 1\right) \exp(h(1 + h + o(h))) \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{2}{h} + 1\right) \exp(h + h^2 + o(h^2))$$

En utilisant le DL d'exponentielle en 0, on a :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{2}{h} + 1\right) \left(1 + (h + h^2) + \frac{1}{2}(h + h^2)^2 + o(h^2)\right) \\ \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{2}{h} + 1\right) \left(1 + h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)\right) \\ \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{2}{h} + 3 + 4h + o(h) \end{aligned}$$

On remarque que h tend vers 0^+ lorsque x tend vers $+\infty$. En repassant à x , on a :

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x + 3 + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la courbe représentative de g admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 2x + 3$.

Comme $g(x) - (2x + 3) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{x}$, qui est positif, la courbe représentative de g est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

3. Pour tout $x > 0$, on pose $y = \frac{1}{x}$. Alors,

$$h\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^2} + 1\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{y}(1 + y + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

En utilisant le DL à l'ordre 2 en 0 de $z \mapsto (1 + z)^{\frac{1}{3}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{y}\right) \underset{y \rightarrow 0}{=} \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{3}(y + y^3) - \frac{1}{9}(y + y^3)^2 + o(y^2)\right) \\ \underset{y \rightarrow 0}{=} \frac{1}{y} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}y + o(y) \end{aligned}$$

On remarque que y tend vers 0^+ lorsque x tend vers $+\infty$. En repassant à x , on a :

$$h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la courbe représentative de g admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x + \frac{1}{3}$.

Comme $h(x) - (x + \frac{1}{3}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{9x}$, qui est négatif, la courbe représentative de h est en-dessous de son asymptote en $+\infty$.

Solution 10 –

1. On pose $f : x \mapsto \ln(1 + x) - \sin(x)$, qui est bien définie au voisinage de 0. Alors, pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x + o(x^2)) \\ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Comme $(\frac{1}{n})$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \\ u_n \sim \frac{-1}{2n^2} \end{aligned}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = n \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$. On pose $f : x \mapsto e^x - 1 - x \frac{1}{1 + x}$, qui est bien définie au voisinage de 0. Alors, pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x(1 - x + o(x))\right) \\ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{3}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Comme $(\frac{1}{n})$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{2n^2} + o((1/n)^2) \\ v_n = nf\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{3}{2n} \end{aligned}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$w_n = e^{1/n} - \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$w_n = e^{1/n} - \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

On pose $f : x \mapsto e^x - \cos(x) - \sin(x)$, qui est bien définie au voisinage de 0. Alors, pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - (1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - (x+o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2) \\ f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \end{aligned}$$

Comme $(\frac{1}{n})$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$w_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) - 1 + \frac{1}{n^2} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) - 1 + \frac{1}{n^2}$$

On pose donc $f : x \mapsto \exp(x \ln(1-x)) - 1 + x^2$, qui est bien définie au voisinage de 0. Pour tout x dans ce voisinage, on a :

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ x \ln(1-x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

En utilisant le développement d'exponentielle en 0, on a :

$$\begin{aligned} \exp(x \ln(1-x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(-x^2 - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(-x^2 - \frac{x^3}{2}\right)^2 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient en utilisant ce dernier équivalent en $\frac{1}{n}$:

$$x_n \sim \frac{-1}{2n^3}$$

Solution 11 – On note la fonction

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a \ln(x) + b \ln(1+x) + c \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

On pose $h = \frac{1}{x}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a \ln(x) + b \ln(x) + b \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2c \ln(x) + c \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= (a+b+2c) \ln(x) + b \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + c \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} (a+b+2c) \ln(x) + b \frac{1}{x} - \frac{b}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + c \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} (a+b+2c) \ln(x) + b \frac{1}{x} + \frac{2c-b}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

On obtient alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (a+b+2c) \ln(n) + b \frac{1}{n} + \frac{2c-b}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

• Si $a+b+2c \neq 0$, u_n ne converge pas vers 0, donc u_n n'est pas un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

• Si $a+b+2c = 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} b \frac{1}{n} + \frac{2c-b}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Si $b \neq 0$, alors $u_n \sim \frac{b}{n}$, donc u_n n'est pas un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On doit donc avoir $b = 0$ et $a = -2c$. Dans ce cas,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} c \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et on a bien $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Finalement, $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si et seulement si $a = -2c$ et $b = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $(a, b, c) \in \text{Vect}(-2, 0, 1)$.

Solution 12 –

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$, on a
 $f_n(x) = 5x^4 + n > 0$. Donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$.
 $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n > 0$. f_n étant continue sur $[0; 1]$, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $u_n \in [0; 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Comme $f(0) \neq 0 \neq f(1)$, on a $u_n \in]0; 1[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
On va utiliser la croissance de f_{n+1} pour étudier la monotonie de la suite u .
 $f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = u_n^5 + nu_n - 1 + u_n = f_n(u_n) + u_n = u_n \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
Donc $f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$. Comme f_{n+1} est croissante, on en déduit que $u_n \geq u_{n+1}$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante, donc converge vers une limite $\ell \in [0; 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{1 - u_n^5}{n}$.
 $u_n \rightarrow \ell$ donc $1 - u_n^5 \rightarrow 1 - \ell^5$, d'où $\frac{1 - u_n^5}{n} \rightarrow 0$.
Finalement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $nu_n = 1 - u_n^5$, donc $nu_n \rightarrow 1$. Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{n}$.
On en déduit aussi, que $nu_n - 1 = u_n^5 \sim \frac{1}{n^5}$ et donc que $u_n - \frac{1}{n} \sim \frac{-1}{n^6}$.
D'où au voisinage de $+\infty$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Solution 13 –

- Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \ln x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique $x_n = f^{-1}(n)$.
- Le tableau de variation de f^{-1} donne $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Par suite $x_n \rightarrow +\infty$.
- $x_n \rightarrow +\infty$ donne $\ln x_n = o(x_n)$. La relation $x_n + \ln x_n = n$ donne alors $x_n + o(x_n) = n$ et donc $x_n \sim n$.

Solution 14 –

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + e^x$. la fonction f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^x > 0$. Donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée x_n .

- $f(x_n) = n \leq n+1 = f(x_{n+1})$ donc $x_n \leq x_{n+1}$ car f^{-1} est croissante. Si (x_n) est majorée par M alors $f(x_n) = n \leq f(M)$ ce qui est absurde. La suite (x_n) étant croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$. $x_n = o(e^{x_n})$ donc $e^{x_n} \sim n \rightarrow +\infty \neq 1$ puis $x_n \sim \ln n$.
- Posons $y_n = x_n - \ln n = o(\ln n)$.
On a $y_n + \ln n + ne^{y_n} = n$ donc

$$e^{y_n} = 1 - \frac{y_n}{n} - \frac{\ln n}{n} \rightarrow 1$$

d'où $y_n \rightarrow 0$ et

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n).$$

On a alors $y_n + \ln n + n(1 + y_n + o(y_n)) = n$ d'où $ny_n + o(ny_n) = -\ln n$ et

$$y_n \sim -\frac{\ln n}{n}.$$

Par suite

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

On écrit $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$ et

$$e^{y_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + z_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

donc

$$-\frac{\ln n}{n} + z_n + nz_n + \frac{1}{2}\frac{(\ln n)^2}{n} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) = 0$$

puis

$$z_n \sim -\frac{(\ln n)^2}{2n^2}.$$

Finalement

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right).$$

Solution 15 – Le développement limité en 0 à l'ordre 10 de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{a=0}^{10} x^a + o(x^{10}).$$

De la même façon, celui de $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ est

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{b=0}^5 x^{2b} + o(x^{10}),$$

et celui de $h(x) = \frac{1}{1-x^5}$ est

$$\frac{1}{1-x^5} = \sum_{c=0}^2 x^{5c} + o(x^{10}).$$

Pour calculer le développement de la fonction (qui est le produit fgh), on peut tout développer à la main et on obtient :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + o(x^{10})$$

Mais il y a une seconde façon de voir ce produit (sans vraiment le calculer) :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = f(x)g(x)h(x) = \left(\sum_{a=0}^{10} x^a \right) \left(\sum_{b=0}^5 x^{2b} \right) \left(\sum_{c=0}^2 x^{5c} \right) + o(x^{10}).$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} &= \sum_{a=0}^{10} \sum_{b=0}^5 \sum_{c=0}^2 x^{a+2b+5c} + o(x^{10}) \\ &= \sum_{n=0}^{10} \text{card} \{ (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a+2b+5c = n \} x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $\text{card} \{ (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a+2b+5c = 10 \} = 10$. On peut bien sûr arriver plus facilement à ce résultat en comptant, mais il n'est pas si facile de ne pas oublier de solutions.

Solution 16 –

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : « $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ ».

Initialisation : On a $u_0 = 0$ donc $u_1 = \frac{e^0}{0+1} = 1$. Ainsi, on a bien $0 \leq u_1 \leq 1$.

Hérédité : On suppose que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $e^{-u_n} \leq 1$ donc

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a par ailleurs clairement $u_{n+1} \geq 0$. Donc, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Dès lors, par le théorème d'encadrement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. La question précédente montre en particulier que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} = \frac{1+o(1)}{n+1} = \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Poussons le raisonnement plus loin,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{e^{-u_n}}{n+1} = \frac{e^{-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'où,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On poursuit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{e^{-u_n}}{n+1} = \frac{1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{u_n}{n+1} + \frac{u_n^2}{2(n+1)} + \frac{o(u_n^2)}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{2n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)^2} + \frac{3}{2n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!