

EXERCICES — CHAPITRE 21

Exercice 1 (♣) –

1. On considère les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto x^2 \quad f_2 : x \mapsto 4x^2 \ln(x) \quad f_3 : x \mapsto 2x^3$$

$$f_4 : x \mapsto 7\sqrt{x} \quad f_5 : x \mapsto -3\cos(x)x^2$$

ainsi que la fonction $g : x \mapsto x^2 + 4x^2 \ln(x) + 2x^3 + 7\sqrt{x} - 3\cos(x)x^2$.

- Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(f_j(x))$.
- Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(f_j(x))$.
- Déterminer l'exposant $\alpha \in \{3; 2; 1/2\}$ tel qu'on puisse écrire

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^\alpha).$$

- Déterminer un équivalent de g en 0.
- Mêmes questions au voisinage de $+\infty$ pour les mêmes fonctions.

2. On considère les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad f_2 : x \mapsto \frac{13}{x^3} \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{(\ln(x))^2} \quad f_4 : x \mapsto e^{-x}$$

ainsi que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{13}{x^3} + \frac{1}{(\ln(x))^2} + e^{-x}$.

- Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_j(x))$.
- Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 2 (♣) –

1. Déterminer un équivalent simple au voisinage du point indiqué des fonctions :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \quad x \mapsto \cos(\sin(x)) & \text{en } 0 \\ \beta) \quad x \mapsto \tan(\sin(x)) & \text{en } 0 \\ \gamma) \quad x \mapsto \ln(\cos(x)) & \text{en } 0 \\ \delta) \quad x \mapsto \exp(\cos(x)) - 1 & \text{en } \pi/2 \\ \varepsilon) \quad x \mapsto \ln(\sin(x)) & \text{en } 0 \end{array}$$

2. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point indiqué.

$$\begin{array}{ll} \zeta) \quad x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) & \text{en } 0 \\ \eta) \quad x \mapsto \operatorname{Arccos}(x) - \pi/2 & \text{en } 0 \\ \theta) \quad x \mapsto \operatorname{sh}(x) & \text{en } 0 \\ \iota) \quad x \mapsto \tan(x) - \sqrt{3} & \text{en } \pi/3 \end{array}$$

3. Déterminer un équivalent simple de la fonction tangente au voisinage de π .

En déduire un équivalent simple de $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$ au voisinage de 0.

Exercice 3 (♥) – Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes, aux points indiqués :

- $x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 6}$ en $+\infty$, en 0;
- $x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ en $\frac{\pi}{4}$;
- $x \mapsto \frac{x^5 + 2x^3}{3x^2 + 4x}$ en 0;
- $x \mapsto \ln(1 + x^2 + 5x^4)$ en 0, en $+\infty$;
- $x \mapsto [x^2]$ en $+\infty$;
- $x \mapsto \ln(1 + x^2) + \cos x$ en $+\infty$, en 0;
- $\ln$ en 1;
- $x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3}$ en 0, en $+\infty$, en -1 ;
- $x \mapsto \sin(3x^2) + \ln(1 + 2x)$ en 0;
- $x \mapsto \sin(e^{-x})$ en $+\infty$;
- $x \mapsto \ln(5x^2 + e^{2x})$ en $+\infty$ puis en 0;
- $x \mapsto \frac{e^{(x^2)} + 3x^2}{x^5 + \ln x}$ en $+\infty$, en 0.

Exercice 4 (♥) – Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes au point indiqué en utilisant des équivalents :

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) = \frac{e^{\cos(x)-1} - 1}{x^2} & \text{en } 0 \\ b) \quad g(x) = \frac{e^x - e}{x - \sqrt{x}} & \text{en } 1 \\ c) \quad h(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)} & \text{en } 2 \\ d) \quad k(x) = (1+x)^{1/x} & \text{en } 0 \end{array}$$

Exercice 5 (♥) – Trouver une suite simple équivalente à la suite de terme général donné par

$$\begin{array}{lll} u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} & v_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} & w_n = n^{1/n} - 1 \\ r_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) & s_n = \ln(n+1) - \ln n & t_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \\ a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+5} + \frac{1}{4n^2} & b_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3n}\right)} & c_n = 3 + e^{1/n} - \frac{6}{n} \\ d_n = \sqrt{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) & e_n = \frac{n^4 + 2n^3 - 1}{3n+2} & f_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \end{array}$$

Exercice 6 (♥) – Utiliser des équivalents pour calculer les limites suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n & \text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n-x}\right)^n \\ \text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+5n-4}{n^2-3n+7}\right)^n & \text{e) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{f) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \end{array}$$

Exercice 7 (♠) – Donner la factorisation de $a^3 - b^3$ par $a - b$ pour a et b réels. En déduire la limite de la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$. Retrouver ce résultat en utilisant des équivalents.

Exercice 8 (logarithme d'un équivalent) (♠) –

- Donner deux suites équivalentes (u_n) et (v_n) telles que $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ne soient pas équivalents.
- Montrer que si $u_n \sim v_n$ et si la suite $(|\ln(v_n)|)$ est minorée par un nombre réel strictement positif alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Indication : (x_n) tend vers 1 si, et seulement si, la suite $(x_n - 1)$ tend vers 0.

- Donner un équivalent de la suite de terme général $\ln(\sin(\frac{1}{n}))$.

Exercice 9 (♣) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2(2n+1)}{\pi} \leq u_n^2 \leq \frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminer un équivalent de (u_n) .

Exercice 10 (♥) – Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$:

$$\int_0^1 e^{-xt} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 11 (♥) – Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique de $\int_0^1 t^n f(t) dt$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12 (♥) – Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$$

pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$.

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!