

EXERCICES — CHAPITRE 21

Solution 1 –

1. (a) Toutes les fonctions considérées sont non-nulles sur un voisinage de 0, sauf éventuellement en 0. En étudiant les quotients $\frac{f_i}{f_j}$ et leurs limites en 0 (éventuellement par croissances comparées), on obtient que $f_i(x) = o_{x \rightarrow 0}(f_j(x))$ si et seulement si

$$(i, j) \in \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 2), (5, 4)\}.$$

- (b) De même, $f_i(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow 0}(f_j(x))$ si et seulement si

$$(i, j) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)$$

$$(4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 4), (5, 5)\}.$$

- (c) Remarquons que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $\alpha \in \{3; 2; 1/2\}$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{g(x)}{x^\alpha} = x^{2-\alpha} + 4x^{2-\alpha} \ln(x) + 2x^{3-\alpha} + 7x^{\frac{1}{2}-\alpha} - 3\cos(x)x^{2-\alpha}.$$

Si $\alpha = 2$ ou $\alpha = 3$, on a que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^\alpha} = +\infty$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 7$.

Donc $g(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow 0}(x^\alpha)$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

- (d) On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{7\sqrt{x}} = 1$, donc $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 7\sqrt{x}$.

- (e) f_5 s'annule sur tout voisinage de l'infini et est la seule dans ce cas, donc aucune autre fonction n'est dominée ou négligeable devant elle. Dans les autres cas, en étudiant les quotients $\frac{f_i}{f_j}$ et leurs limites en $+\infty$ (éventuellement par croissances comparées), on obtient que $f_i(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(f_j(x))$ si et seulement si

$$(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}.$$

De même, $f_i(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}(f_j(x))$ si et seulement si

$$(i, j) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3),$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Soit $\alpha \in \{3; 2; 1/2\}$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{g(x)}{x^\alpha} = x^{2-\alpha} + 4x^{2-\alpha} \ln(x) + 2x^{3-\alpha} + 7x^{\frac{1}{2}-\alpha} - 3\cos(x)x^{2-\alpha}.$$

Si $\alpha = 2$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$, on a que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha} = +\infty$.

Si $\alpha = 3$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 2$.

Donc $g(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha)$ si et seulement si $\alpha = 3$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{2x^3} = 1$, donc $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^3$.

2. (a) Toutes les fonctions considérées sont non-nulles sur un voisinage de $+\infty$, donc par croissances comparées, on obtient que $f_i(x) = o_{x \rightarrow 0}(f_j(x))$ si et seulement si

$$(i, j) \in \{(2, 1), (1, 3), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

- (b) Pour tout x assez grand, on a

$$\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln(x)^2}} = \frac{\ln(x)^2}{x^2} + 13 \frac{\ln(x)^2}{x^3} + 1 + e^{-x} \ln(x)^2.$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln(x)^2}} = 1$, donc $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)^2}$.

Solution 2 –

1. $\alpha)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin(x)) = 1$ et $\cos(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.
 $\beta)$ De plus, $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc $\tan(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
 $\gamma)$ Pour tout x au voisinage de 0,

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1).$$

Or, $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0$, donc

$$\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}.$$

δ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$ et $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc

$$\exp(\cos(x)) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \cos(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x.$$

ε) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$, on utilise la méthode du cours pour trouver des équivalents de $\ln(u(x))$. On sait que $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc montrons que $\ln(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$. Pour $x \in]0, 1[$,

$$\frac{\ln(x)}{\ln(\sin(x))} - 1 = \frac{\ln(x) - \ln(\sin(x))}{\ln(\sin(x))} = \frac{\ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)}{\ln(\sin(x))}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin(x)) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right) = 0$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\ln(\sin(x))} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\ln(\sin(x))} = 1$ et $\ln(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

2. ζ) arcsin est dérivable en 0 et $\arcsin'(0) = 1 \neq 0$, donc

$$\arcsin(x) - \arcsin(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin'(0)(x - 0)$$

$$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

η) arccos est dérivable en 0 et $\arccos'(0) = -1 \neq 0$, donc

$$\arccos(x) - \arccos(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arccos'(0)(x - 0)$$

$$\arccos(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x.$$

θ) sh est dérivable en 0 et $\text{sh}'(0) = 1 \neq 0$, donc

$$\text{sh}(x) - \text{sh}(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \text{sh}'(0)(x - 0)$$

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

ι) tan est dérivable en $\frac{\pi}{3}$ et $\tan'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}^2 = 4 \neq 0$, donc

$$\tan(x) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{\sim} \tan'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\tan(x) - \sqrt{3} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{\sim} 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

3. tan est dérivable en π et $\tan'(\pi) = 1 + \tan^2(\pi) = 1 \neq 0$, donc

$$\tan(x) - \tan(\pi) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} \tan'(\pi)(x - \pi).$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} (x - \pi).$$

Comme $\frac{\pi}{2x+1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \pi$, on en déduit

$$\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2x+1} - \pi = \frac{-2\pi x}{2x+1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2\pi x.$$

Donc $\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2\pi x$.

Solution 3 –

1. On a directement que $\frac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 6} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^3}{3x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{3}$ et

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 6} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2}{6} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{3}.$$

2. $\sin - \cos$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et sa dérivée est $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \neq 0$. Donc

$$\sin(x) - \cos(x) - \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(x) - \cos(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3. On a immédiatement que

$$\frac{x^5 + 2x^3}{3x^2 + 4x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x^3}{4x} = \frac{x^2}{2}$$

4. $x^2 + 5x^4$ converge vers 0 en 0, donc par changement de variable, on a

$$\ln(1 + x^2 + 5x^4) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 + 5x^4 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

En $+\infty$, on utilise la méthode du cours :

$$\frac{\ln(5x^4)}{\ln(1 + x^2 + 5x^4)} - 1 = \frac{\ln\left(\frac{5x^4}{1 + x^2 + 5x^4}\right)}{\ln(1 + x^2 + 5x^4)}$$

Comme $\frac{5x^4}{1+x^2+5x^4} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, on a par opérations et compositions de limites que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{5x^4}{1+x^2+5x^4}\right)}{\ln(1+x^2+5x^4)} \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x^4)}{\ln(1+x^2+5x^4)} = 1, \text{ donc}$$

$$\ln(1+x^2+5x^4) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(5x^4) = 4\ln(x) + \ln(5) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4\ln(x)$$

car $\ln(5) = o(4\ln(x))$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2 - 1 \leq \lfloor x^2 \rfloor \leq x^2$$

Comme $x^2 - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, par théorème des gendarmes pour les équivalents, on a que $\lfloor x^2 \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x^2) + \cos(x) = 1$, donc $\ln(1+x^2) + \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.

On a $\cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(1+x^2))$ puisque $\frac{\cos(x)}{\ln(1+x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui converge vers 0). Ainsi, $\ln(1+x^2) + \cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1+x^2)$. Ensuite, on applique la méthode habituelle pour trouver un équivalent de $x \mapsto \ln(1+x^2)$. Puisque $1+x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, on considère, pour $x > 0$,

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x^2)} - 1 = \frac{\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)}{\ln(x^2)}.$$

Or $\frac{1+x^2}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, donc

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x^2)} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

puis $\ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ln(x)$. Finalement, on a obtenu $\ln(1+x^2) + \cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ln(x)$.

7. Pour tout x au voisinage de 1,

$$\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x-1$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3} &= \frac{(x+2)x^3 - (x+1)x^3 + 100(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)x^3} \\ &= \frac{x^3 + 100x^2 + 300x + 200}{x^5 + 3x^4 + 2x^3} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{200}{2x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{100}{x^3} \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3} &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^5} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Au voisinage de -1 , $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ et $x \mapsto \frac{100}{x^3}$ sont bornées donc négligeables devant $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ puisque $\lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{1}{x+1} \right| = +\infty$. D'où

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

9. Par composition d'équivalents, on a que

$$\sin(3x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x^2 \quad \ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$$

Or, $3x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(2x)$, donc $\sin(3x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(1+2x))$. On en déduit que

$$\sin(3x^2) + \ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$$

10. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\sin(e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$.

11. On a $5x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{2x})$ par croissances comparées donc $5x^2 + e^{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2x}$. Ainsi le cours assure qu'il faut calculer, pour tout $x > 0$:

$$\frac{\ln(5x^2 + e^{2x})}{\ln(e^{2x})} - 1 = \frac{\ln\left(\frac{5x^2 + e^{2x}}{e^{2x}}\right)}{2x}.$$

Or, $\frac{5x^2 + e^{2x}}{e^{2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, donc

$$\frac{\ln(5x^2 + e^{2x})}{\ln(e^{2x})} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

puis $\ln(5x^2 + e^{2x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(e^{2x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$. On a $5x^2 + e^{2x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc, par changement de variable, $\ln(5x^2 + e^{2x}) = \ln(5x^2 + e^{2x} - 1 + 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x^2 + e^{2x} - 1$. Puisque $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on obtient avec un changement de variable $e^{2x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$. Comme $5x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(2x)$, on en déduit $5x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(e^{2x} - 1)$, puis $\ln(5x^2 + e^{2x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^{2x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$.

12. Par croissances comparées, $3x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{(x^2)})$ et $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^5)$, donc

$$\frac{e^{(x^2)} + 3x^2}{x^5 + \ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{(x^2)}}{x^5}.$$

Puisque $e^{(x^2)} + 3x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on a $e^{(x^2)} + 3x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$. De plus, $x^5 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$, donc $x^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x))$. Ainsi,

$$\frac{e^{(x^2)} + 3x^2}{x^5 + \ln x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}.$$

Solution 4 –

a) $\cos(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc

$$e^{\cos(x)-1} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{2}$ et $\lim_0 f = -\frac{1}{2}$.

b) Pour tout x au voisinage de 1 différent de 1, on a

$$g(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{e^{x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, donc $e^{x-1} - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$. Donc

$$g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{e}{\sqrt{x}} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{e}{\sqrt{x}} \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = e \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}.$$

Donc $\lim_1 g = 2e$.

c) $\sin(x - 2) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} x - 2$ car $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$.

Pour tout x au voisinage de 2, $\ln(x - 1) = \ln(1 + (x - 2)) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} x - 2$.

Donc $h(x) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$ et $\lim_2 h = 1$.

d) Pour tout x non-nul au voisinage de 0,

$$k(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

Or, $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_0 k = e$.

Solution 5 –

1. Pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \sqrt{n-1} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1 \right) = \sqrt{n-1} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n-1}} - 1 \right)$$

$\frac{2}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\sqrt{1 + \frac{2}{n-1}} - 1 \sim \frac{2}{2(n-1)}$ et

$$u_n \sim \frac{2\sqrt{n-1}}{2(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Pour tout $n \geq 2$,

$$v_n = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{2}{n^2 - 1} \sim \frac{2}{n^2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) - 1.$$

$\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, donc

$$w_n \sim \frac{\ln(n)}{n}.$$

4. $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ et

$$r_n \sim \frac{1}{n}.$$

5. Pour tout $n \geq 1$,

$$s_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$s_n \sim \frac{1}{n}.$$

6. sh est dérivable en 0 et $\text{sh}'(0) = 1 \neq 0$, donc $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a

$$t_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

7. Pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{(n+5)4n^2 - (n+1)4n^2 + (n+1)(n+5)}{(n+1)(n+5)4n^2} \sim \frac{15n^2}{4n^4} \sim \frac{15}{4n^2}$$

8. $\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$ convergent vers 0, donc

$$b_n \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\left(\frac{\pi}{3^n}\right)} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 3$, donc $c_n \sim 3$.

10. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$, d'où

$$d_n \sim \sqrt{n} \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

11. Pour tout $n \geq 0$,

$$e_n \sim \frac{n^4}{3n} = \frac{n^3}{3}$$

12. On a $e^{1/n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, donc

$$e^{1/n} - 1 - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\text{puis } e^{1/n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Solution 6 –

1) Pour tout $n \geq 1$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

$$\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc}$$

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim n \frac{x}{n} = x.$$

Donc $\lim n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$ et on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)\right)$$

$$\frac{-2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right) \sim \frac{-2}{n+1}. \text{ D'où}$$

$$n \ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right) \sim \frac{-2n}{n+1} \sim \frac{-2n}{n} = -2.$$

Donc $n \ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$, d'où l'on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2}.$$

3) Pour tout n entier assez grand,

$$\left(\frac{n}{n-x}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n-x}\right)\right)$$

$$\text{Comme } \frac{x}{n-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n-x}\right) \sim n \frac{x}{n-x} \sim x$$

Donc $n \ln\left(1 + \frac{x}{n-x}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n-x}\right)^n = e^x$$

4) Pour tout n entier assez grand,

$$\left(\frac{n^2+5n-4}{n^2-3n+7}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n^2+5n-4}{n^2-3n+7}\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{8n-11}{n^2-3n+7}\right)\right)$$

$$\frac{8n-11}{n^2-3n+7} \sim \frac{8n}{n^2} = \frac{8}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc on a l'équivalent}$$

$$n \ln\left(1 + \frac{8n-11}{n^2-3n+7}\right) \sim n \frac{8n-11}{n^2-3n+7} \sim n \frac{8}{n} = 8$$

On en déduit que

$$n \ln\left(1 + \frac{8n-11}{n^2-3n+7}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 8$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+5n-4}{n^2-3n+7}\right)^n = e^8$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) - 1 \sim \frac{-1}{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{-\pi^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc}$$

$$n \ln\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) \sim n\left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) \sim \frac{-\pi^2}{2}$$

On en déduit que

$$n \ln\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-\pi^2}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{\frac{-\pi^2}{2}}.$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc}$$

$$\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim 1$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^1.$$

Solution 7 – Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} = \frac{(n+1) - n}{(n+1)^{2/3} + 2(n+1)^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3}}$$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Méthode par équivalents : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n^{\frac{1}{3}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3} \times \frac{1}{n}$, donc $u_n \sim \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et on retrouve la limite nulle.

Solution 8 –

1. On peut prendre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite constante égale à 1 et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. Ces deux suites convergent vers une même limite finie non-nulle (1) donc sont équivalentes.

Or $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle, et seules les suites nulles à partir d'un certain rang sont équivalentes à la suite nulle. Comme v_n ne vaut jamais 1, $\ln(v_n)$ n'est jamais nul et ainsi $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équivalente à $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Notons m un minorant strictement positif de $(|\ln(v_n)|)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 \right| = \left| \frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \right| = \frac{\left| \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \right|}{|\ln(v_n)|} \leq \frac{1}{m} \left| \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \right|.$$

Comme u et v sont équivalentes, $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$\left| \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1$ et donc que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 = \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{-\ln(n)}$$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n \frac{1}{n} = 1$, d'où $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et on obtient que

$\ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que

$$\frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc que $\frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ d'où l'on tire que

$$\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n).$$

Solution 9 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{2(2n+1)}{\pi} \sim \frac{4n}{\pi} \quad \frac{(2n+1)^2}{n\pi} \sim \frac{4n^2}{\pi n} = \frac{4n}{\pi}$$

Donc par théorème des gendarmes pour les équivalents, $u_n^2 \sim \frac{4n}{\pi}$. Comme u est positive, en prenant la puissance $\frac{1}{2}$ de cet équivalent, on obtient

$$u_n \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Solution 10 – Notons F une primitive de f sur $[0, 1]$. Alors, F est de classe $\mathcal{C}^1$ par le théorème fondamental de l'analyse et, par intégration par parties, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-xt} f(t) dt &= \left[-e^{-xt} f(t) \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-xt} F(t) dt \\ &= -f(1) e^{-x} + f(0) + \int_0^1 e^{-xt} F(t) dt \end{aligned}$$

Et donc pour $x > 0$,

$$\left| x \int_0^1 e^{-xt} f(t) dt \right| \leq |f(1)| + |f(0)| + \int_0^1 |F(t)| dt$$

Ce qui montre bien que $\int_0^1 e^{-xt} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution 11 – Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a par double intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n f(t) dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \\ &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[t^{n+2} f'(t) \right]_0^1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 t^{n+2} f''(t) dt \\ &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 t^{n+2} f''(t) dt \end{aligned}$$

Par ailleurs, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ donc f'' est continue sur $[0, 1]$. Ainsi, d'après le théo-

rème des bornes atteintes, $|f''|$ est majorée sur $[0, 1]$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} n^2 \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left| \int_0^1 t^{n+2} f''(t) dt \right| &\leq \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \times \max_{t \in [0,1]} |f''(t)| \times \int_0^1 t^{n+2} dt \\ &= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \max_{t \in [0,1]} |f''(t)| \\ &\sim \frac{\max_{t \in [0,1]} |f''(t)|}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Autrement dit, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 t^{n+2} f''(t) dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et :

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution 12 – Considérons la fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$$

Une rapide étude de f montre que f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et positive.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \int_1^n f(t) dt$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante (à partir d'un certain rang) et minorée, ce qui, avec le théorème de convergence monotone, nous donnera le résultat annoncé.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \int_1^{n+1} f(t) dt - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \int_1^n f(t) dt \right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt \end{aligned}$$

Or, f est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc en particulier sur $[n, n+1]$ pour $n \geq 3$. Ainsi, pour tout $n \geq 3$ et pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(t)$ i.e $f(n+1) - f(t) \leq 0$.

Par décroissance de l'intégrale, on a donc $\int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt \leq 0$, d'où

$$\forall n \geq 3, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

- De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq 3$, et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a, par décroissance de f , $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ donc, par croissance de l'intégrale, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$ puis par croissance du signe $\sum$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 4$,

$$\sum_{k=3}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=3}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=3}^{n-1} f(k)$$

On en déduit, par relation de Chasles et changement d'indice,

$$\sum_{k=3}^n f(k) - f(3) \leq \int_3^n f(t) dt \leq \sum_{k=3}^n f(k) - f(n)$$

Et donc, $f(n) + f(1) + f(2) \leq u_n \leq f(1) + f(2) + f(3)$. En particulier, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par $f(2)$, car f est positive et $f(1) = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc. En notant ℓ sa limite, on obtient donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ i.e $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0$, i.e $u_n = \ell + o(1)$ d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!