

EXERCICES — CHAPITRE 20

Exercice 1 (♥) – Calculer le PGCD et le PPCM de :

$$2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1 \quad \text{et} \quad 3X^3 + 4X^2 + 4X + 1.$$

Exercice 2 (♥) – Déterminer les pgcd suivants :

1. $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$;
2. $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$;
3. $P(X) = X^n - 1$ et $Q(X) = (X - 1)^n, n \geq 1$.

Exercice 3 (♥) – Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.

Exercice 4 (♠) – Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice 5 (♠) – On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A et B ne sont pas premiers entre eux.
- (ii) il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}[X] - \{0\})^2$ tel que

$$AU + BV = 0, \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A.$$

Exercice 6 (♣) – Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 7 (♥) – Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Déterminer les racines et les pôles de

$$F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}$$

en précisant les multiplicités respectives.

Exercice 8 (♥) – Décomposer en éléments simples la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 24x - 17}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

Exercice 9 (♥) – Décomposer en éléments simples la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x^5 + x + 4}{x^4 - 1}.$$

En déduire une primitive de g sur $] -1, 1[$.

Exercice 10 (♠) – Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir remarqué que $X = (X - 1) + 1$, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\frac{X^m}{(X - 1)^n}$.

Exercice 11 (♠) – Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X + 1) \dots (X + n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 (♥) – Soit la fraction

$$F = \frac{1}{X(X + 1)}$$

1. Réaliser la décomposition en éléments simples de F .
2. En déduire une simplification pour $n \geq 1$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)}$.
3. Procéder de même pour calculer : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)}$.

Exercice 13 (♥) – Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$ sur $]1, +\infty[$
2. $x \mapsto \frac{x}{x^3 - 7x + 6}$ sur $]2, +\infty[$.

Exercice 14 (♦) – Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{x^3 + x}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2}{X^3 + X}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 f(x) dx$.

Exercice 15 (♥) – Soit $n \geq 1$. Déterminer la dérivée n -ème de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!