

EXERCICES — CHAPITRE 20

Solution 1 – On considère les polynômes :

$$A = 2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1 \quad \text{et} \quad B = 3X^3 + 4X^2 + 4X + 1.$$

On applique l'algorithme d'Euclide.

On effectue la division euclidienne de A par B :

$$A = \left(\frac{2}{3}X + \frac{1}{9}\right)B + \left(\frac{8}{9}X^2 + \frac{8}{9}X + \frac{8}{9}\right).$$

En multipliant le reste par $\frac{9}{8}$ (ce qui ne change pas le PGCD), on pose :

$$R_2 = X^2 + X + 1.$$

On effectue maintenant la division euclidienne de B par R_2 .

$$B = (3X + 1)R_2 + 0.$$

Ainsi,

$$A \wedge B = X^2 + X + 1.$$

Le PPCM de deux polynômes non nuls est donné par :

$$A \vee B = \frac{AB}{A \wedge B}.$$

On obtient donc :

$$A \vee B = \frac{(2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1)(3X^3 + 4X^2 + 4X + 1)}{X^2 + X + 1} = (2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1)(3X + 1)$$

Solution 2 –

1. On applique l'algorithme d'Euclide. Le dernier reste non-nul donne un pgcd des deux polynômes. On a successivement :

$$X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 = (X^3 - 3X^2 + 3X - 2)X + (-2X^2 + 2X + 4)$$

$$X^3 - 3X^2 + 3X - 2 = (-2X^2 + 2X + 4)\left(\frac{-X}{2} + 1\right) + 3X - 6$$

$$(-2X^2 + 2X + 4) = (3X - 6) \times \left(\frac{-2X}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

Un pgcd est donc $3X - 6$ (ou $X - 2$).

2. On répète le même procédé :

$$X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 = (X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1)1 + 2X^3 - 4X^2 + 4X - 2$$

$$X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 = (2X^3 - 4X^2 + 4X - 2)\left(\frac{X^2}{2} + \frac{X}{2}\right) + X^2 - X + 1$$

$$2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 = (X^2 - X + 1)(2X - 2) + 0$$

Un pgcd des deux polynômes est donc $X^2 - X + 1$.

3. Les diviseurs non-constants de Q sont les polynômes du type $c(X - 1)^p$, avec $1 \leq p \leq n$. Parmi ces diviseurs, seuls ceux de la forme $c(X - 1)$ divisent aussi P (par exemple, car 1 est racine simple et non double de P , ou bien parce qu'on sait comment décomposer P en produits d'irréductibles...). Ainsi, $P \wedge Q = X - 1$.

Solution 3 – On utilise l'algorithme d'Euclide. On a

$$X^7 - X - 1 = (X^5 - 1)X^2 + X^2 - X - 1$$

$$X^5 - 1 = (X^2 - X - 1)(X^3 + X^2 + 2X + 3) + 5X + 2$$

$$X^2 - X - 1 = (5X + 2)(X/5 - 7/25) - 11/25$$

On remonte ensuite les calculs. On va partir plutôt de

$$11 = -25(X^2 - X - 1) + (5X - 7)(5X + 2)$$

pour éviter de trainer des fractions. On trouve alors successivement :

$$\begin{aligned} 11 &= -25(X^2 - X - 1) + (5X - 7)((X^5 - 1) - (X^2 - X - 1)(X^3 + X^2 + 2X + 3)) \\ &= (-5X^4 + 2X^3 - 3X^2 - X - 4)(X^2 - X - 1) + (5X - 7)(X^5 - 1) \\ &= (-5X^4 + 2X^3 - 3X^2 - X - 4)(X^7 - X - 1) + (5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7) \end{aligned}$$

Il suffit de diviser par 11 pour obtenir les polynômes U et V .

Solution 4 – Posons $D = \text{pgcd}(A, B)$. On a $D^2 = \text{pgcd}(A^2, B^2)$ associé à A^2 donc $\deg D^2 = \deg A^2$ puis $\deg D = \deg A$.

Or $D \mid A$ donc D et A sont associés. Puisque $D \mid B$, on obtient $A \mid B$.

Solution 5 –

(i) $\implies$ (ii) Posons $D = \text{pgcd}(A, B)$ qui est non constant.

Puisque $D \mid A$ et $D \mid B$ on peut écrire $A = DV$ et $-B = DU$ avec $\deg V < \deg A$ et $\deg U < \deg B$. de sorte que $AU + BV = DUV - DUV = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii)

Si par l'absurde $A \wedge B = 1$ alors, puisque $A \mid -BV$ on a $A \mid V$. Or $V \neq 0$ donc $\deg A \leq \deg V$ ce qui est exclu. Absurde.

Solution 6 – Si F est solution alors $\deg F^2 = 2 \deg F = 1$ avec $\deg F \in \mathbb{Z}$. C'est impossible.

Solution 7 – Déterminons les racines communes à $X^p - 1$ et $X^q - 1$. Soit ω une telle racine. On a $\omega^p = \omega^q = 1$. Puisque p et q sont premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + qv = 1$.

On a alors $\omega = \omega^{pu+qv} = (\omega^p)^u (\omega^q)^v = 1$. Inversement, 1 est racine commune. De plus, notons que toutes les racines de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ sont simples. Les racines de F sont les racines p ème de l'unité autres que 1. Elles sont simples. Les pôles de F sont les racines q ème de l'unité autres que 1. Ils sont simples. 1 n'est ni pôle, ni racine.

Solution 8 – On pose $A = 2X^4 - 9X^3 + 4X^2 + 24X - 17$ et $B = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

Déterminons les racines de B : On trouve une racine évidente : 1. En notant α et β les deux autres racines (a priori complexes) de B (avec des répétitions éventuelles en cas de multiplicité supérieure ou égale à 2), on a d'après les relations coefficients racines que

$$\alpha + \beta + 1 = 6, \quad 1 \times \alpha \times \beta = 6.$$

Ainsi, les deux autres racines sont 2 et 3 et toutes les racines sont simples.

D'où $B = (X-1)(X-2)(X-3)$. On note f la fonction de l'énoncé, qui est donc définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.

On va effectuer la division euclidienne de A par B .

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2X^4 & -9X^3 & +4X^2 & +24X & -17 & X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \\ -2X^4 & +12X^3 & -22X^2 & +12X & & 2X + 3 \\ \hline & 3X^3 & -18X^2 & 36X & -17 & \\ & -3X^3 & +18X^2 & -33X & +18 & \\ \hline & & & 3X & +1 & \end{array}$$

On en déduit que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{3x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe trois uniques réels a, b, c tels que pour tout $x \in D$,

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} \quad (1)$$

En multipliant (1) par $(x-1)$, on a

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} = a + \frac{b(x-1)}{x-2} + \frac{c(x-1)}{x-3}$$

Ainsi, en prenant la limite lorsque x tend vers 1, on obtient $a = 2$

De même, en multipliant (1) par $(x-2)$ puis en prenant la limite lorsque x tend vers 2, on a que $b = -7$

Enfin, en multipliant (1) par $(x-3)$ puis en prenant la limite lorsque x tend vers 3, on a que $c = 5$

On peut ainsi compléter la décomposition en éléments simples de f :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = 2x + 3 + \frac{2}{x-1} + \frac{-7}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

Solution 9 – On pose $A = X^5 + X + 4$ et $B = X^4 - 1$. On sait que B se factorise en $(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$.

On a facilement que $A = XB + 2X + 4$ est la division euclidienne de A par B .

Donc pour tout $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a

$$g(x) = x + \frac{2x+4}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)}.$$

D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$, il existe des uniques complexes a, b, c, d tels que pour tout $x \in D$,

$$\frac{2x+4}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{x+i} \quad (2)$$

En multipliant (2) par $(x-1)$ puis en prenant la limite lorsque x tend vers 1, on a que $a = \frac{3}{2}$

De même, En multipliant (2) par $(x+1)$ puis en prenant la limite lorsque x tend vers -1 , on

a que $b = \frac{-1}{2}$

En appliquant la méthode de truaud consistant à multiplier (2) par $(x-i)$ puis prendre la limite lorsque x tend vers i (ce qui est illicite), on obtient que

$$c = \frac{2i+4}{(i-1)(i+1)2i} = \frac{2i+4}{-4i} = \frac{-2+4i}{4} \text{ et donc } c = \frac{-1}{2} + i.$$

En prenant le conjugué de (2), on obtient que pour tout $x \in D$

$$\frac{2x+4}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{\bar{c}}{x+i} + \frac{\bar{d}}{x-i} \quad (\text{car } a \text{ et } b \text{ sont réels}) \text{ et l'unicité des}$$

coefficients a, b, c, d nous donne que $d = \bar{c} = \frac{-1}{2} - i.$

Ainsi, la décomposition en éléments simples de g est pour tout $x \in D$,

$$g(x) = x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{2} + i}{x-i} + \frac{\frac{-1}{2} - i}{x+i}.$$

$$g(x) = x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \frac{(\frac{-1}{2} + i)(x+i) + (\frac{-1}{2} - i)(x-i)}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \frac{-x-2}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}(2x) - 2}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{-2}{x^2 + 1}$$

On peut alors en déduire G une primitive de g sur $] -1, 1[$:

$$G : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 2 \operatorname{Arctan}(x).$$

Solution 10 – Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On cherche la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle :

$$\frac{X^m}{(X-1)^n}.$$

On écrit :

$$X^m = ((X-1) + 1)^m.$$

En développant à l'aide de la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$X^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (X-1)^k.$$

Ainsi,

$$\frac{X^m}{(X-1)^n} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(X-1)^k}{(X-1)^n} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n}.$$

On distingue deux cas :

- si $k \geq n$, alors $(X-1)^{k-n}$ est un polynôme ;
- si $k < n$, alors $(X-1)^{k-n} = \frac{1}{(X-1)^{n-k}}$ est une fraction rationnelle simple.

On peut donc écrire :

$$\frac{X^m}{(X-1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} \frac{1}{(X-1)^{n-k}} + \sum_{k=n}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n}.$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\frac{X^m}{(X-1)^n} = E(X) + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{(X-1)^j}$$

où :

$$a_j = \binom{m}{n-j} \quad \text{et} \quad E(X) = \sum_{k=n}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n}.$$

Solution 11 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2) \cdots (X+n)}.$$

Les racines du dénominateur sont simples et distinctes :

$$0, -1, -2, \dots, -n.$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit donc :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2) \cdots (X+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{X+k},$$

où les A_k sont des réels à déterminer.

On multiplie l'égalité précédente par $X(X+1) \cdots (X+n)$:

$$1 = \sum_{k=0}^n A_k \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (X+j).$$

En évaluant cette identité en $X = -k$, tous les termes s'annulent sauf celui correspondant à A_k , ce qui donne :

$$1 = A_k \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (j-k).$$

Or :

$$\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (j-k) = (-1)^k k!(n-k)!.$$

Ainsi :

$$A_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}.$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{X+k}.$$

Solution 12 –

1. On obtient

$$F = \frac{X+1-X}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

2. Par télescopage

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

3. On a

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1/2}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1/2}{X+2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}.$$

Solution 13 – On va réaliser à chaque fois une décomposition en éléments simples.

1. On peut factoriser $1 - X^2$ en $(1 - X)(1 + X)$ et on sait qu'il existe des réels a et b de sorte que

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$$

Notons $Q(X) = 1 - X^2$, de sorte que $Q'(X) = -2X$. On a $a = 1/Q'(1) = -1/2$ et $b = 1/Q'(-1) = 1/2$. Ainsi,

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{-1/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $]1, +\infty[$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1).$$

2. On peut factoriser $X^3 - 7X + 6$ en $(X+3)(X-1)(X-2)$ (pour cela, on remarque auparavant que 1 est racine évidente par exemple). On en déduit qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\frac{X}{X^3 - 7X + 6} = \frac{a}{X+3} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2}.$$

Posons $P(X) = X$ et $Q(X) = X^3 - 7X + 6$, de sorte que $Q'(X) = 3X^2 - 7$. Alors on a

$$a = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = -\frac{3}{20}, b = \frac{P(1)}{Q'(1)} = -\frac{1}{4}, c = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{2}{5}.$$

On a donc

$$\frac{x}{x^3 - 7x + 6} = -\frac{3}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{2}{5(x-2)}.$$

Une primitive de cette fonction sur $]2, +\infty[$ est donc donnée par

$$x \mapsto -\frac{3}{20} \ln(x+3) - \frac{1}{4} \ln(x-1) + \frac{2}{5} \ln(x-2).$$

Solution 14 –

1. On commence par effectuer la division euclidienne de $X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2$ par $X^3 + X$. On trouve que le quotient vaut $X + 1$ et le reste vaut $3X^2 + X + 2$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2}{X^3 + X} &= X + 1 + \frac{3X^2 + X + 2}{X^3 + X} \\ &= X + 1 + \frac{3X^2 + X + 2}{X(X-i)(X+i)} \\ &= X + 1 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X-i} + \frac{\bar{b}}{X+i} \end{aligned}$$

Posons $P(X) = 3X^2 + X + 2$ et $Q(X) = X^3 + X$. Alors $a = P(0)/Q'(0) = 2$, $b = P(i)/Q'(i) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2}{X^3 + X} &= X + 1 + \frac{2}{X} + \frac{1}{2} \frac{1-i}{X-i} + \frac{1}{2} \frac{1+i}{X+i} \\ &= X + 1 + \frac{2}{X} + \frac{X+1}{X^2+1}. \end{aligned}$$

2. On calcule l'intégrale en cherchant une primitive de chacun des termes précédents. On écrit encore

$$\frac{X+1}{X^2+1} = \frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{X^2+1}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} + x + 2\ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(5) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Solution 15 – On va commencer par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2}.$$

On peut factoriser $X^2 - 3X + 2$ en $(X - 1)(X - 2)$. On a donc

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2}.$$

Notons $P(X) = X^2 - 3X + 2$ de sorte que $P'(X) = 2X - 3$. Alors $a = \frac{1}{P'(1)} = -1$ et $b = \frac{1}{P'(2)} = 1$.

Ainsi, on a

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

D'autre part, il est facile de voir (par exemple par récurrence) que la dérivée n -ème de $x \mapsto \frac{1}{x}$

est $x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. On en déduit finalement que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!