

EXERCICES — CHAPITRE 1

Exercice 1 (♣) – Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si il est vrai ou faux, puis en donner la négation :

1. Tout multiple de 5 est un multiple de 3.
2. Le successeur d'un nombre pair est un nombre premier.
3. Le quotient de deux suites de termes strictement positifs et de limite nulle est une suite de limite nulle.

Exercice 2 (♣) – Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

1. $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y^2$.
2. $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y^2$.
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y^2$.
4. $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y^2$.

Exercice 3 (♣) – Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Traduire en langage « clair » les assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$;
2. $\exists x \in I, \exists y \in I, f(x) \neq f(y)$ (on pourra écrire la négation);
3. $\forall x \in I, (f(x) = 0 \implies x = 0)$.

Exercice 4 (♣) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par le nombre réel 4;
2. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée;
3. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée;
4. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée;
5. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante;
6. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante;
7. la suite est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 5 (♣) – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \text{ est premier} \implies (n = 2 \text{ ou } n \text{ est impair}).$$

Exercice 6 (♠) – Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels positifs. Montrer que si $\sum_{k=1}^n a_k = 0$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = 0$.

Exercice 7 (♣) – Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E . Déterminer explicitement les ensembles : $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup \overline{B}$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 3]$, $B = [2; +\infty[$
3. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$

Exercice 8 (♣) – Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et soient les parties suivantes de E :

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\}, & B &= \{4, 5, 6, 7\}, \\ C &= \{1, 3, 5, 7\}, & D &= \{2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
2. $(A \cup C) \cap (B \cup D)$
3. $(\overline{A \cap D}) \cap (\overline{B \cup C})$

Exercice 9 (♣) – Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Décrire explicitement l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 10 (♣) – Soient A et B deux ensembles.

1. Montrer que $A \cup (A \cap B) = A$.
2. Montrer que $A \cap (A \cup B) = A$.

Exercice 11 (♦) – Soit E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E . On appelle *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$ le sous-ensemble de E :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B; x \notin A \cap B\}$$

1. Interpréter les éléments de $A \Delta B$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ (ou $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E).
3. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta \overline{A}$.
4. Démontrer que pour tous A, B et C sous-ensembles de E , on a :

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

Exercice 12 (♠) – Soit E un ensemble et soient A , B et C trois parties de E .

1. Montrer que $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
2. Montrer que $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Exercice 13 (♥) – Soit $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1; 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 14 (♥) – Étudier les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$ pour :

$$A = \left\{ \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \mid k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 15 (♣) – Écrire à l'aide des symboles $\cap$, $\cup$, et d'ensembles les ensembles suivants :

1. A , l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 et pairs.
2. B , l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 ou de 9.
3. C , l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 ou de 9, et pairs.

Exercice 16 (♣) –

1. Écrire sous la forme d'une réunion infinie d'ensembles la partie

$$A = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Déterminer B tel que l'on ait $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[= \mathbb{R} \setminus B$.

Exercice 17 (♠) – Montrer les égalités suivantes :

1. $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; n \right] = \{1\}$
2. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1 + n \right] = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 18 (♠) – Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.

Exercice 19 (♣) – On se place sur le territoire des gibbons du Parc de Sainte-Croix. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des gibbons et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bananes. Pour tous g et h des gibbons et b une banane, on définit l'assertion

$$T(g, b, h) : \text{« Le gibbon } g \text{ lance la banane } b \text{ au gibbon } h. \text{ »}$$

Chaque assertion mathématique de gauche (repérée par les nombres de 1 à 12) correspond à une description à droite (repérées par les lettres de a à l).

Retrouvez les associations entre les assertions et les descriptions.

- | | |
|---|---|
| 1. $\forall b \in \mathcal{B}, \exists g \in \mathcal{G}, \exists h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | a. Folie gibbonienne totale! |
| 2. $\exists g \in \mathcal{G}, \exists h \in \mathcal{G}, \forall b \in \mathcal{B}, T(g, b, h)$ | b. Rugby gibbon. |
| 3. $\exists g \in \mathcal{G}, \exists b \in \mathcal{B}, \exists h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | c. Que toutes les bananes soient lancées! |
| 4. $\exists g \in \mathcal{G}, \exists b \in \mathcal{B}, \forall h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | d. Un gibbon en aime vraiment un autre. |
| 5. $\exists g \in \mathcal{G}, \forall b \in \mathcal{B}, \exists h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | e. Un gibbon distribue le déjeuner. |
| 6. $\exists g \in \mathcal{G}, \forall b \in \mathcal{B}, \forall h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | f. Il montre sa banane à tout le monde. |
| 7. $\forall g \in \mathcal{G}, \exists b \in \mathcal{B}, \exists h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | g. Au moins un jet de banane. |
| 8. $\forall g \in \mathcal{G}, \exists b \in \mathcal{B}, \forall h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | h. Chaque gibbon lance chaque banane. |
| 9. $\forall g \in \mathcal{G}, \forall b \in \mathcal{B}, \exists h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | i. Le quarterback gibbon s'entraîne avec toutes les bananes : Tous les autres les rattrapent. |
| 10. $\forall g \in \mathcal{G}, \forall b \in \mathcal{B}, \forall h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | j. Service de livraison : Un des gibbons livre toutes les bananes. |
| 11. $\exists g \in \mathcal{G}, \forall h \in \mathcal{G}, \exists b \in \mathcal{B}, T(g, b, h)$ | k. Que tout le monde lance une banane! |
| 12. $\exists b \in \mathcal{B}, \forall g \in \mathcal{G}, \forall h \in \mathcal{G}, T(g, b, h)$ | l. Exposé gibbon : Chaque gibbon montre sa banane préférée à tout le monde. |

Quelques exercices sur le raisonnement par récurrence

Exercice 20 (♣) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6 - 2u_n. \end{cases}$

Montrer, pour tout entier n , l'égalité : $u_n = (-2)^{n+1} + 2$.

Exercice 21 (♥) – On pose $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-u_n + 18}{3u_n + 2}$. On admet que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement définie. Prouver que tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle $[0, 9]$.

Exercice 22 (♠) – Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice 23 (♠) – Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n + 1 \geq n^2$.

Exercice 24 (♥) – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 25 (♥) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice 26 (♥) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n. \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$.

Exercice 27 (♥) – On considère la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 28 (♠) – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Quelques exercices sur le raisonnement par Analyse-Synthèse

Exercice 29 (♥) – Montrer par analyse-synthèse que toute fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 30 (♥) – Montrer par un raisonnement par analyse-synthèse que toute fonction réelle dérivable se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction dont la dérivée s'annule en 0 et d'une fonction linéaire (c'est-à-dire une fonction de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.)

Exercice 31 (♠) – Déterminer toutes les fonctions réelles f telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Quelques vidéos pour se cultiver:

Pourquoi on ne peut pas tout démontrer :

 [Le théorème de Gödel - Voyages au pays des maths - Arte](#) 

Deux exemples d'équation fonctionnelle résolues par Analyse-Synthèse :

 [Une initiation aux équations fonctionnelles - Les maths en finesse - Oljen](#) 

 [Une équation fonctionnelle plus difficile - Les maths en finesse - Oljen](#) 

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!