EXERCICES — CHAPITRE 1

Solution 1 –

1. Faux. En effet, 5 est multiple de 5 mais n'est pas un multiple de 3.
   La négation est : « Il existe un multiple de 5 qui n'est pas un multiple de 3. »
2. Faux. En effet, 8 est pair, mais son successeur 9 n'est pas premier.
   La négation est : « Il existe un nombre pair dont le successeur n'est pas un nombre premier. »
3. Faux. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\frac{1}{n},\quad v_n=\frac{1}{n^2}.$$
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de termes strictement positifs et de limite nulle. De plus,
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{u_n}{v_n}=n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} n=+\infty$$
   Donc le quotient u/v n'est pas de limite nulle.
   La négation est : « Il existe deux suites de termes strictement positifs et de limite nulle dont le quotient n'est pas de limite nulle. »

Solution 2 –

1. Vrai. En prenant $x=0$ et $y=1$, on a bien $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{N}$, et $x\leqslant y$.
2. Vrai. En prenant $x=0$, on a $x\in\mathbb{Z}$, et pour tout entier $x\in\mathbb{N}$, on a bien $x\leqslant y$.
3. Vrai. Soit x in $\mathbb{Z}$. On pose alors $y=|x|$. Alors $x\leqslant y^2$.
4. Faux. Pour $x=1$ et $y=0$, on a bien $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$ mais on a pas $x\leqslant y^2$.

Solution 3 –

1. f ne s'annule pas sur I.
2. La négation de l'assertion est $\forall x\in I, \forall y\in y, f(x)=f(y)$. Ce qui décrit une fonction constante.
   Donc l'assertion originale se traduit par f n'est pas constante sur I.
3. f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais elle ne s'y annule pas forcément).

Solution 4 –

1. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant 4$.
2. $\exists M\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant M$.
3. $\exists m\in\mathbb{R}, \exists M\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, m\leqslant u_n\leqslant M$.
4. On écrit la négation de la question 2 :
   $\forall M\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{N}, u_n>M$.
5. $\forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, u_n=u_p$.
6. $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\geqslant u_n$.
7. $\exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, \big((n\geqslant N_0 \text{ et } p\geqslant N_0)\Rightarrow u_n=u_p\big)$.

Solution 5 – On procède par contraposée. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On va donc montrer que
$$n\neq 2 \text{ et } n \text{ pair} \Rightarrow n \text{ n'est pas premier.}$$
Si $n\neq 2$ et n est pair, alors n est pair, donc divisible par 2. Or $n\neq 2$, donc n admet au moins trois diviseurs distincts : 1, 2 et n, donc n n'est pas premier.
On a montré que $n\neq 2$ et n pair $\Rightarrow$ n n'est pas premier. D'où le résultat par contraposée.

Solution 6 – Procédons par contraposée.
Supposons qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $a_k\neq 0$. Alors $a_k>0$ car $a_k\geqslant 0$.
Or, pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $a_i\geqslant 0$, donc $a_1+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\ldots a_n\geqslant 0$. D'où $a_1+\cdots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n\geqslant a_k>0$.
D'où le résultat par contraposée.

Solution 7 –

1. $A\cap B=\{2\}$; $A\cup B=\{1,2,4\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{3\}$, $A\cup\overline{B}=\{1,2,3\}$, $A\setminus B=\{1\}$, $B\setminus A=\{4\}$.
2. $A\cap B=[2;3]$; $A\cup B=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$, $A\cup\overline{B}=]-\infty;3]=A$, $A\setminus B=]-\infty;2[$, $B\setminus A=]3;+\infty[$.
3. $A\cap B=\mathbb{N}^*$; $A\cup B=\mathbb{N}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $A\cup\overline{B}=\mathbb{N}\cup]-\infty;0]$, $A\setminus B=\{0\}$, $B\setminus A=]0;+\infty[\setminus\mathbb{N}^*$.

Solution 8 –

1. $(A\cap B)\cup(C\cap D)=\{3,4,5\}$
2. $(A\cup C)\cap(B\cup D)=\{2,3,4,5,7\}$
3. $(\overline{A}\cap D)\cap(\overline{B\cup C})=\varnothing$

Solution 9 – On a
$$\mathcal{P}(E)=\Big\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\Big\}$$

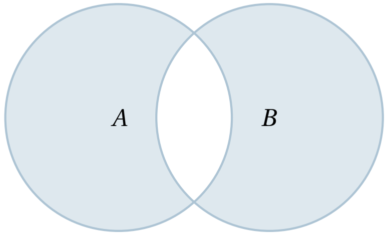
Solution 10 –

1. On a $A \cap B \subset A$, donc $A \cup (A \cap B) = A$ d'après la proposition 2.61 du cours.
2. On a $A \subset A \cup B$, donc $A \cap (A \cup B) = A$ d'après la proposition 2.61 du cours.

Solution 11 –

1. Les éléments de $A \Delta B$ correspond à l'ensemble des éléments qui sont soit dans A, soit dans B, mais pas dans les deux. Sur un diagramme de Venn, cela donne :

$A\Delta B$



2. On procède par double inclusion.
   - $A\Delta B \subset (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$: soit $x \in A\Delta B$. Alors, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Donc, $x \in A$ ou $x \in B$ et $x \notin A \cap B$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$ car sinon on aurait $x \in A \cap B$ ce qui est exclus. Donc, $x \in A \cap \overline{B}$. De même, si $x \in B$, alors $x \notin A$ donc, $x \in B \cap \overline{A}$. Bref, $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$. Ce qui montre la première inclusion.
   - $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \subset A\Delta B$: soit $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$. Alors $x \in A \cap \overline{B}$ ou $x \in B \cap \overline{A}$. Si $x \in A \cap \overline{B}$, alors $x \in A \cup B$ (puisque $x \in A$) mais $x \notin A \cap B$ (puisque $x \notin B$). Donc, $x \in A\Delta B$. De même, si $x \in B \cap \overline{A}$ alors $x \in A\Delta B$. Ce qui montre la deuxième inclusion.
3. On a :
   - $A\Delta A = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
   - $A\Delta \emptyset = (A \cap A) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = A \cup \emptyset = A$
   - $A\Delta E = (A \cap \emptyset) \cup (E \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$
   - $A\Delta \overline{A} = (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) = A \cup \overline{A} = E$
4. D'une part, on a :

$$(A\Delta B) \cap C = \Big((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\Big) \cap C = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{A} \cap C)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(A \cap C)\Delta(B \cap C) &= \left(A \cap C \cap \overline{B \cap C}\right) \cup \left(B \cap C \cap \overline{A \cap C}\right) \\
&= \Big(A \cap C \cap (\overline{B} \cup \overline{C})\Big) \cup \Big(B \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{C})\Big) \\
&= \Big((A \cap C \cap \overline{B}) \cup (A \cap C \cap \overline{C})\Big) \cup \Big((B \cap C \cap \overline{A}) \cup (B \cap C \cap \overline{C})\Big) \\
&= \Big((A \cap B \cap \overline{C}) \cup \emptyset\Big) \cup \Big((B \cap \overline{A} \cap C) \cup \emptyset\Big) \\
&= (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{A} \cap C) = (A\Delta B) \cap C
\end{aligned}$$

Ce qui démontre bien l'égalité demandée.

Solution 12 –

1. On procède par équivalence. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus C &\iff x \in A \cap B \text{ et } x \notin C \\
&\iff x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin C \\
&\iff (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
&\iff x \in A \setminus C \text{ et } x \in B \setminus C \\
&\iff x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

2. On procède de nouveau par équivalence. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \setminus C &\iff x \in A \cup B \text{ et } x \notin C \\
&\iff x \in A \text{ ou } x \in B \text{ et } x \notin C \\
&\iff (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
&\iff x \in A \setminus C \text{ ou } x \in B \setminus C \\
&\iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Solution 13 – On procède par double inclusion.

- $A \subset B$: soit $(x, y) \in A$. Alors on a $4x - y = 1$. Posons $t = x - 1 \in \mathbb{R}$, de sorte que $x = t + 1$. Puisque $4x - y = 1$, on a $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$. Ainsi, on a $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Donc, $(x, y) \in C$.
- $B \subset A$: soit $(x, y) \in B$. Alors, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Dès lors, $4x - y = 4(t + 1) - (4t + 3) = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$. Ainsi, on a bien $(x, y) \in A$.

Solution 14 – Montrons que $A \subset B$. Soit $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{\varepsilon}{k(k+1)} = \frac{\varepsilon}{k} - \frac{\varepsilon}{k+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k} & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

Dans les deux cas ($\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$), on a bien $\dfrac{\varepsilon}{k(k+1)} \in B$. Ceci montre bien que $A \subset B$.

Cependant, $A \neq B$. En effet, on a $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} \in B$ mais $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{4} \notin B$ puisque 4 ne peut s'écrire comme un produit de la forme $k(k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution 15 –

1. $A = \{7k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
2. $B = \{7k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{9k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
3. $C = (\{7k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{9k \mid k \in \mathbb{N}\}) \cap \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Solution 16 –

1. $A = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$.
2. En prenant $B = \mathbb{Z}$, on a bien $\mathbb{R} \setminus B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[$.

Solution 17 –

1. On procède par double inclusion.
   - $\{1\} \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; n\right]$: Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \leqslant n$. Autrement dit, $1 \in \left[1 - \dfrac{1}{n} ; n\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est-à-dire $1 \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; n\right]$.
   - $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; n\right] \subset \{1\}$: Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; n\right]$. Alors $x \in \left[1 - \dfrac{1}{n} ; n\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant n$. En prenant $n = 1$ dans l'inégalité de droite, on obtient $x \leqslant 1$. Par ailleurs, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité de gauche, on obtient $x \geqslant 1$. Ainsi, $x = 1$, *i.e* $x \in \{1\}$.
2. On procède également par double inclusion.
   - $\mathbb{R}_+ \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; 1 + n\right]$: Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x \in [0;1]$, alors en prenant $n = 1$, on a bien $x \in \left[1 - \dfrac{1}{n} ; n + 1\right]$. Sinon, posons $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}^*$. On a alors $x \leqslant n + 1$. Par ailleurs, $x \geqslant n$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Ainsi, $x + \dfrac{1}{n} \geqslant x + \dfrac{1}{x} \geqslant 1$ (la preuve de la dernière égalité est élémentaire et laissée au lecteur). Ainsi, on a bien $x \in \left[1 - \dfrac{1}{n} ; 1 + n\right]$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; 1 + n\right]$. Donc, on a bien
   $$\mathbb{R}_+ \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; 1 + n\right]$$
   - $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; 1 + n\right] \subset \mathbb{R}_+$: soit $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; 1 + n\right]$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left[1 - \dfrac{1}{n} ; 1 + n\right]$. En particulier, $x \geqslant 1 - \dfrac{1}{n} \geqslant 0$. Donc, $x \in \mathbb{R}_+$. Donc, on a bien
   $$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n} ; 1 + n\right] \subset \mathbb{R}_+$$

Solution 18 – Supposons que $A \cup B = A \cap B$. Montrons que $A = B$ par double inclusion.
Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$. Comme $A \cup B = A \cap B$, on en déduit que $x \in A \cap B$.
Or $A \cap B \subset B$, donc $x \in B$.
Finalement, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$, donc $A \subset B$.
On obtient l'autre inclusion en échangeant les rôles de A et B dans ce raisonnement, et l'on en déduit que $A = B$.

Solution 19 – Les appariements corrects sont

1. c	3. g	5. j	7. k	9. h	11. e
2. d	4. f	6. i	8. l	10. a	12. b

Quelques exercices sur le raisonnement par récurrence

Solution 20 – Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition P_n : « $u_n = (-2)^{n+1} + 2$ ».
Initialisation : $u_0 = 0$ et $(-2)^{0+1} + 2 = -2 + 2 = 0$.
Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_n = (-2)^{n+1} + 2$. Donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 6 - 2u_n \\ &= 6 - 2((-2)^{n+1} + 2) \\ &= 6 - 2(-2)^{n+1} - 4 \\ &= (-2)^{n+2} + 2 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence que P_n est vraie pour tout n entier naturel, donc que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^{n+1} + 2}$.

Solution 21 – Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition P_n : « $u_n \in [0,9]$ ».
Initialisation : $u_0 = 1 \in [0,9]$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a $9 \leqslant -u_n + 18 \leqslant 18$ et $2 \leqslant 3u_n + 2 \leqslant 29$. Comme tous les termes sont positifs, on obtient que $\dfrac{1}{29} \leqslant \dfrac{1}{3u_n + 2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis que

$$\frac{9}{29} \leqslant \frac{-u_n + 18}{3u_n + 2} \leqslant \frac{18}{2} = 9.$$

D'où $u_{n+1} \in [0,9]$. Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence que P_n est vraie pour tout n entier naturel, donc que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,9]}$.

Solution 22 – Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition P_n : « $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 ».
Initialisation : Pour $n = 1$, $3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17$, donc P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2} &= 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \\ &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 8 \times 2^{3n-2} \\ &= 3 \times (17 + 8) \times 5^{2n-1} + 8 \times 2^{3n-2} \\ &= 17 \times (3 \times 5^{2n-1}) + 8 \times (3 \times 5^{2n-1} + \times 2^{3n-2}) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $3 \times 5^{2n-1} + \times 2^{3n-2}$ est divisible par 17, donc $3 \times 5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2}$ est divisible par 17. Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence que P_n est vraie pour tout n entier naturel, donc que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 3 \times 5^{2n-1} + \times 2^{3n-2} \text{ est divisible par 17}}$.

Solution 23 – Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition P_n : « $2^n + 1 \geqslant n^2$ ». La récurrence commencera à partir de $n = 3$.
Pour $n = 0$, on a $2^0 + 1 = 2 \geqslant 0^2$, donc P_0 est vraie.
Pour $n = 1$, on a $2^1 + 1 = 3 \geqslant 1^2$, donc P_1 est vraie.
Pour $n = 2$, on a $2^2 + 1 = 5 \geqslant 2^2$, donc P_2 est vraie.
Initialisation : Pour $n = 3$, $2^3 + 1 = 9 \geqslant 8 = 2^3$, donc P_3 est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 3$ fixé tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} + 1 &= 2 \times (2^n + 1) - 1 \\ 2^{n+1} + 1 &\geqslant 2n^2 - 1 \end{aligned}$$

On cherche à montrer que $2n^2 - 1 \geqslant (n+1)^2$, c'est à dire que $n^2 - 2n - 2 \geqslant 0$.
Les racines de $n^2 - 2n - 2$ sont $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$ (le discriminant est 12), donc pour $n \geqslant 3$, on a bien $n^2 - 2n - 2 \geqslant 0$ et donc $2n^2 - 1 \geqslant (n+1)^2$. D'où

$$2^{n+1} + 1 \geqslant (n+1)^2.$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 3$, donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2^n + 1 \geqslant n^2}$.

Solution 24 – Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition P_n : « $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
Initialisation : Pour $n = 1$, $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = 1^2$.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ fixé tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \times \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) \\ &= (n+1) \times \left(\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \right) \\ &= (n+1) \times \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right) \end{aligned}$$

$(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$. Donc,

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= (n+1)\times\left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence que P_n est vraie pour tout n entier naturel, donc que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$

Solution 25 – Procédons par récurrence double. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la proposition P_n : « $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ ».
Initialisation : $u_0 = -1$ et $3^0 - 2^{0+1} = 1-2 = -1$.
Donc P_0 est vraie.
$u_1 = -1$ et $3^1 - 2^{1+1} = 3-4 = -1$.
Donc P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé tel que P_n et P_{n+1} soient vraies. Montrons que P_{n+2} est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_{n+2} \\ &= 5(3^{n+1}-2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1}) \\ &= 5\times 3^{n+1} - 5\times 2^{n+2}) - 6\times 3^n + 6\times 2^{n+1} \\ &= 5\times 3^{n+1} - 5\times 2^{n+2}) - 2\times 3^{n+1} + 3\times 2^{n+2} \\ &= (5-2)3^{n+1} + (-5+3)2^{n+2} \\ &= 3^{n+2} - 2^{n+3} \end{aligned}$$

Donc P_{n+2} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence double que P_n est vraie pour tout n entier naturel, donc que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}.}$

Solution 26 – Procédons par récurrence double. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la proposition P_n : « $1\leqslant u_n \leqslant n^2$ ».
Initialisation : $u_1 = 1$, donc $1\leqslant u_1\leqslant 1$, donc P_1 est vraie.
$u_2 = 1+\frac{2}{3}1 = \frac{5}{3}$, donc $1\leqslant u_3\leqslant 2^2$, donc P_2 est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé tel que P_n et P_{n+1} soient vraies. Montrons que P_{n+2} est vraie.
On a donc $\frac{2}{n+2}\leqslant\frac{2u_n}{n+2}\leqslant\frac{2n^2}{n+2}$ et $1\leqslant u_{n+1}\leqslant(n+1)^2$. En sommant,

$$1+\frac{2}{n+2}\leqslant u_{n+1}+\frac{2u_n}{n+2}\leqslant\frac{2n^2}{n+2}+(n+1)^2,$$

$$1\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{2n^2+(n+1)^2(n+2)}{n+2}.$$

On s'intéresse à ce dernier terme. On cherche à montrer qu'il est inférieur à $(n+2)^2$.

$$\begin{aligned} \frac{2n^2+(n+1)^2(n+2)}{n+2} - (n+2)^2 &= \frac{2n^2+(n^2+2n+1)(n+2)-(n+2)^3}{n+2} \\ &= \frac{2n^2+n^3+4n^2+5n+2-(n^3+6n^2+12n+8)}{n+2} \\ &= \frac{-7n-6}{n+2}\leqslant 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{2n^2+(n+1)^2(n+2)}{n+2}\leqslant(n+2)^2$ et donc que

$$1\leqslant u_{n+2}\leqslant(n+2)^2.$$

Donc P_{n+2} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence double que P_n est vraie pour tout n entier naturel non-nul, donc que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ 1\leqslant u_n\leqslant n^2.}$

Solution 27 – Procédons par récurrence forte.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la proposition P_n : « $u_n = 2^{n-1}$ ».
Initialisation : Pour $n=1$, on a $u_1 = u_0 = 1 = 2^{1-1}$, donc la proposition P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant n$, P_k soit vraie.
Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par définition de la suite u, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{n-1}+u_n \\ &= 1+1+2+4+8+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1. Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1+\frac{1-2^n}{1-2} \\ &= 1+\frac{1-2^n}{-1} \\ &= 1-(1-2^n) \\ u_{n+1} &= 2^n \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence forte que P_n est vraie pour tout n entier naturel non-nul, donc que $\boxed{\text{pour tout entier } n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}.}$

Solution 28 – Procédons par récurrence forte.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition P_n : « il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$ ».
Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$, donc la proposition P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, P_k soit vraie.
Montrons que P_{n+1} est vraie.
Si $k = n+1$. Procédons par disjonction de cas :

- Si $n+1$ est pair. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2m$. Comme $m < n+1$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe p, q entiers positifs tels que $m = 2^p(2q+1)$. On a alors :
  $n+1 = 2^{p+1}(2q+1)$.
- Si $n+1$ est impair, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2m+1 = 2^0(2m+1)$.

Dans les deux cas, on a bien réussi à écrire $n+1$ sous la forme recherchée.
Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : On en déduit par récurrence forte que P_n est vraie pour tout n entier naturel, donc que $\boxed{\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } n = 2^p(2q+1).}$

Quelques exercices sur le raisonnement par Analyse-Synthèse

Solution 29 – Soit f une fonction réelle dérivable.
Analyse : Supposons que $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f(-x) = g(x) - h(-x)$$

D'où $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. Si elles vérifient bien les conditions, g et h sont donc définies de manière unique.
Synthèse : On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$ et $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$, donc g est paire et h est impaire. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x).$$

Solution 30 – Soit f une fonction réelle dérivable.
Analyse : Supposons qu'il existe g et h des fonctions réelles telles que $f = g + h$, que g soit dérivable et sa dérivée s'annule en 0 et que h soit de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Alors, on a : $f' = g' + a$.
En évaluant cette relation en 0, on obtient $f'(0) = g'(0) + a = a$ (car $g'(0) = 0$). Donc $h : x \mapsto f'(0)x$ et $g = f - h$.
Ainsi, g et h, **si elles existent**, sont $\boxed{\text{uniques}}$.
Synthèse : On pose $h : x \mapsto f'(0)x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g = f - h$. Alors :

1. $h + g = h + f - h = f$.
2. h est bien une fonction linéaire d'après sa définition.
3. f est dérivable par hypothèse et h est dérivable en tant que fonction linéaire. Comme $g = f - h$, g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En 0, on a :

$$g'(0) = f'(0) - h'(0) = f'(0) - f'(0) = 0.$$

On a donc montré l'existence d'une décomposition de f comme somme d'une fonction dont la dérivée s'annule en 0 et d'une fonction linéaire.

Solution 31 –
Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Soit f une fonction réelle.
Analyse : Supposons que f vérifie $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.
En $x = 0$ et $y = 0$, on obtient $f(0)^2 = f(0)$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
En $x = 0$ et $y = 1$, on obtient $f(0)f(1) = f(0) + 1$. Si $f(0) = 0$, on a alors $0 = 1$, ce qui est absurde.
Donc $f(0) = 1$.
En $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$ quelconque, on a : $f(0)f(y) = f(0) + y$, d'où $f(y) = y + 1$.
Donc f est la fonction affine $f : x \mapsto x + 1$.
Synthèse : On pose $f : x \mapsto x + 1$. Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.
Soient x et y quelconques dans $\mathbb{R}$. Alors :
$f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + x + y + 1 = f(xy) + x + y$.
Donc f vérifie bien $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.
Conclusion : La seule fonction réelle vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$ est $x \mapsto x + 1$.

Quelques vidéos pour se cultiver:
Pourquoi on ne peut pas tout démontrer :

Le théorème de Gödel - Voyages au pays des maths - Arte

Deux exemples d'équation fonctionnelle résolues par Analyse-Synthèse :

Une initiation aux équations fonctionnelles - Les maths en finesse - Oljen
Une équation fonctionnelle plus difficile - Les maths en finesse - Oljen

♣ Du trèfle à brouter... ♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♥ À connaître par cœur. ♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !