

EXERCICES — CHAPITRE 19

Exercice 1 (♠) – Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Quel est le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$?

Indication : Quel est le coefficient de degré n de $P(X+1) - P(X)$?
Celui de degré $n-1$?

Exercice 2 (♠) – Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

Montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, |a_k| \leq M$$

On pourra utiliser des racines de l'unité.

Exercice 3 (♥) – 1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(E) \quad (1 + X^2)^2 P'' - 2X(1 + X^2)P' + 2(X^2 - 1)P = 0.$$

On s'intéressera au monôme de plus haut degré et à son coefficient dans le membre de gauche de l'égalité quand P est un polynôme de degré n , avec $n \geq 2$.

2. En déduire une solution particulière non-nulle de l'équation différentielle

$$(1 + t^2)^2 y'' - 2t(1 + t^2)y' + 2(t^2 - 1)y = 0.$$

Indication :

1. Le degré du terme de gauche est $d+2$. On doit obtenir que $d = 1$ ou 2 .
Ensuite, il faut traiter les deux cas séparément.
2. Il suffit de choisir un polynôme trouvé question 1.

Exercice 4 (♥) – Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^3 + 7X^2 - 2$ par $B(X) = X^2 + X + 1$.

En déduire les éventuelles asymptotes obliques de la représentation graphique de la fonction

définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 2}{x^2 + x + 1}$.

Exercice 5 (♥) – Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Indication : Calculer la division euclidienne. Le reste doit être nul.

Exercice 6 (♠) – Trouver le reste de la division euclidienne de

1. $X^{2n} + X^n - 1$ par $X - 2$ puis par $X^2 - 4$, où $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X - 1)^2$, où $n \geq 2$.

Indication :

Ne pas poser les divisions euclidiennes... il y a des « n ».

1. Il faut distinguer les cas n pair et n impair.
2. Utiliser une formule de Taylor en 1.

Exercice 7 (♥) – Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 (♠) – 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.

2. Montrer que pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$, $1 + X + X^2$ divise $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$.

Indication :

1. Ne pas poser la division euclidienne.
2. Quelles sont les racines de $1 + X + X^2$?

Exercice 9 (♥) – Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\tilde{P}(0)^2 + \tilde{P}(1)^2 + \tilde{P}(4)^2 + \tilde{P}(7)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Indication : Penser racines.

Exercice 10 (♣) – Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 1$$

Exercice 11 (♠) –

1. Soit $P(X) = n_d X^d + \dots + n_1 X + n_0$ un polynôme de degré $d \geq 1$ à coefficients entiers. Montrer que si P admet une racine N qui est un nombre entier, alors nécessairement N divise n_0 .
2. Les deux polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils une (ou des) racine(s) entière(s) ?

Indication :

1. C'est quoi une racine ?
2. Il s'agit de la question 2. Elle vient donc après la question 1.

Exercice 12 (♥) – On pose $A = 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$ et $B = 4X^3 + 4X^2 - X - 1$. Montrer que A et B ont une racine commune et la déterminer.

Exercice 13 (♥) – Déterminer les racines de $P = 2X^3 - 17X^2 + 40X - 16$ sachant que celui-ci admet une racine double.

Exercice 14 (♥) – Effectuer la division euclidienne de du polynôme $P = 6X^4 - 49X^3 + 123X^2 - 98X + 24$ par $T = X^2 - 7X + 12$. En déduire les racines du polynôme P .

Exercice 15 (♥) –

1. Vérifier que $1 + i$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3 - (4 + i)X^2 + (6 + 2i)X - (4 + 2i)$ et en déduire la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Vérifier que i est racine du polynôme $Q(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ et en déduire la décomposition en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 (♦) – Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes :

$$P_1(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - 4X + 4,$$

$$P_2(X) = X^4 - 1,$$

$$P_3(X) = X^5 + 1,$$

$$P_4(X) = X^4 + X^2 + 1.$$

Exercice 17 (♠) –

1. Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $r = p/q$ exprimée sous forme irréductible. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Factoriser

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$$

Exercice 18 (♦) – Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 8(1 - i)X - 12$ sachant qu'il admet une racine multiple.

Exercice 19 (♠) – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré ≥ 2 ; on veut montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Si x_0 est racine de P de multiplicité $m \geq 1$, déterminer sa multiplicité dans P' ?
3. Prouver le résultat énoncé.

Exercice 20 (♠) – On considère la fonction φ de classe C^∞ (c'est-à-dire n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$) sur $\mathbb{R}^{+*}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(x) = e^{-1/x}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P}_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}.$$

Indication : Par récurrence. Attention à bien poser l'hypothèse de récurrence.

Exercice 21 (♥) – Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Indication : Penser aux relations coefficients-racines.

Exercice 22 (♥) – Déterminer tous les polynômes P, Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$P^2 = XQ^2.$$

Indication : Quels peuvent-être les degrés de ces polynômes ?

Exercice 23 (♠) – Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$18P = P'P''$$

Exercice 24 (♥) – Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$P \circ P = P.$$

Indication : Quel peut-être le degré de P ?

Exercice 25 (♠) – Soit $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux n -uplets de nombres réels tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \tilde{P}(a_k) = b_k$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère le polynôme Q_j défini par

$$Q_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

Enfin on définit le polynôme L , appelé polynôme de Lagrange associé aux n -uplets $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, par

$$L(X) = \sum_{j=1}^n b_j Q_j(X).$$

1. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que vaut $\tilde{Q}_j(a_i)$?
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que vaut $\tilde{L}(a_k)$?
3. Montrer que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{P}(a_k) = b_k$ alors $P = L$.
4. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{P}(a_k) = b_k$. En considérant le polynôme $P - L$, déterminer la forme de P .

Exercice 26 (♠) – Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2 , P_3 et P_4 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme de degré $n-1$ à coefficient dans $\mathbb{Z}$ et dont on précisera le coefficient dominant.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale $\tilde{P}_n$ est de même parité que $n-1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$. En déduire que P_n et P_{n+1} n'ont pas de racine commune.

Indication :

1. Calcul...
2. Par récurrence... (double bien sur). Le coefficient dominant peut se voir question 1.
3. Par récurrence.
4. Par récurrence.

Exercice 27 (♠) – Introduisons la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée des polynômes

$$P_0 = X \quad \text{et} \quad P_1 = 3X - 4X^3,$$

et par la relation de récurrence

$$P_{n+2} = 2(1 - 2X^2)P_{n+1} - P_n.$$

1. Déterminer, pour tout entier naturel n , le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .
2. Montrer que le polynôme X divise P_n pour tout entier naturel n .
3. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
4. Prouver que pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel θ ,

$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n+1)\theta).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Pourquoi peut-on affirmer que le polynôme P_n est le seul polynôme vérifiant pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n+1)\theta)?$$

- (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P_n(\sin(\theta)) = 0$ d'inconnue θ réelle.
- (c) En déduire les racines de P_n dans $[-1; 1]$ et factoriser P_n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 (Polynômes de Tchebychev (1821-1894)) (♥♠) – Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

1. Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3 .
2. Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
3. Établir qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1; 1]$.
4. Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
5. Observer que T_n possède exactement n racines distinctes, que l'on exprimera, toutes dans $] -1; 1[$.

Exercice 29 (Polynômes de Laguerre (1834-1886)) (♥) – Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Montrer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!