

EXERCICES — CHAPITRE 19

Solution 1 – Si P est un polynôme constant, alors $P(X+1) = P(X)$ et

$$\deg(P(X+1) - P(X)) = -\infty.$$

Si $\deg(P) \geq 1$, on pose $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ avec $d = \deg(P) \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $a_d \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= \sum_{i=0}^d a_i (X+1)^i - \sum_{i=0}^d a_i X^i \\ &= \sum_{i=0}^d a_i \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} X^k \right) - \sum_{i=0}^d a_i X^i \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{i=k}^d a_i \binom{i}{k} X^k - \sum_{i=0}^d a_i X^i \\ &= \sum_{k=0}^d X^k \left[\left(\sum_{i=k}^d a_i \binom{i}{k} X^k \right) - a_k \right] \\ &= \sum_{k=0}^d b_k X^k \end{aligned}$$

en posant, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $b_k = \left(\sum_{i=k}^d a_i \binom{i}{k} X^k \right) - a_k$.

Pour $k = d$, on a $b_d = \left(\sum_{i=d}^d a_i \binom{i}{d} X^d \right) - a_d = a_d - a_d = 0$.

Pour $k = d-1$,

$$b_{d-1} = \left(\sum_{i=d-1}^d a_i \binom{i}{d-1} X^{d-1} \right) - a_{d-1} = \binom{d-1}{d-1} a_{d-1} + \binom{d}{d-1} a_d - a_{d-1} = d a_d \neq 0$$

Donc $\deg(P(X+1) - P(X)) = d-1$.

Solution 2 – Soit $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$ une racine $(n+1)$ -ième de l'unité. On a

$$P(1) + P(\omega) + \dots + P(\omega^n) = (n+1)a_0$$

car

$$\sum_{k=0}^n \omega^{k\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } \ell \equiv 0[n+1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit $(n+1)|a_0| \leq (n+1)M$ puis $|a_0| \leq M$. De façon plus générale, on a

$$P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \dots + \omega^{-nk}P(\omega^n) = (n+1)a_k$$

et on en déduit $|a_k| \leq M$.

Solution 3 –

1. Le polynôme nul est solution de (E).

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré d .

On note $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. Alors $P' = \sum_{k=0}^d k a_k X^{k-1}$ et

$$P'' = \sum_{k=0}^d k(k-1) a_k X^{k-2}$$

Si P est solution de (E), comme (E) est une égalité entre deux polynômes, tous les coefficients sont égaux. Entre autre, au degré $d+2$, on a :

$$\begin{aligned} d(d-1)a_d - 2da_d + 2a_d &= 0 \\ a_d(d(d-1) - 2d + 2) &= 0 \\ (d-1)(d-2) &= 0 \quad \text{car } a_d \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $d = 1$ ou $d = 2$.

(a) Si $d = 2$.

Ainsi, il existe a, b, c réels, $a \neq 0$, tels que $P = aX^2 + bX + c$. On a donc $P' = 2aX + B$ et $P'' = 2$. On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} P \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow (1+X^2)^2 \times 2 - 2X(1+X^2)(2aX+B) \\ &\quad + 2(X^2-1)(aX^2+bX+c) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a + 4aX^2 + 2aX^4 - 4aX^2 - 2bX - 4aX^4 - 2bX^3 \\ &\quad + 2aX^4 + 2bX^3 + 2cX^2 - 2aX^2 - 2bX - 2c = 0 \\ &\Leftrightarrow (2c-2a)X^2 - 4bX + (2a-2c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2c-2a=0 \\ -4b=0 \\ 2a-2c=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^*, P = a(X^2+1) \end{aligned}$$

(b) Si $d = 1$, alors $P = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $P' = a$. On a alors :

$$P \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow -2aX(1 + X^2) + 2(X^2 - 1)(aX + b) = 0.$$

En regardant le coefficient de degré 2 de cette égalité, on obtient $-4a = 0$ et donc $a = 0$, ce qui est Faux. Donc (E) n'admet aucune solution de degré 1.

Finalement, les solutions de (E) sont les polynômes de la forme $a(X^2 + 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

(On retrouve bien le polynôme nul lorsque $a = 0$)

2. Ainsi, la fonction polynômiale associée à un de ces polynômes est solution particulière de $(1 + t^2)^2 y'' - 2t(1 + t^2)y' + 2(t^2 - 1)y = 0$. On peut par exemple choisir $f : x \mapsto x^2 + 1$.

Solution 4 – Effectuons la division euclidienne de $X^3 + 7X^2 - 2$ et $X^2 + X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 & +7X^2 & -2 & X^2 + X + 1 \\ -X^3 & -X^2 & -X & X + 6 \\ \hline & 6X^2 & -X & -2 \\ & -6X^2 & -6X & -6 \\ \hline & & -7X & -8 \end{array}$$

Donc $X^3 + 7X^2 - 2 = (-7X - 8) + (X + 6)(X^2 + X + 1)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 2}{x^2 + x + 1} = x + 6 - \frac{7x + 8}{x^2 + x + 1}$.

Donc $f(x) - x + 6 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \underset{x}{\frac{7}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

De même, on a $f(x) - x + 6 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \underset{x}{\frac{7}{x}} \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0$.

Ainsi, la courbe représentative de f a pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ la droite d'équation $y = x + 6$.

Solution 5 – $X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $X^4 + aX^2 + bX + c$ par $X^2 + X + 1$ est nul. Effectuons cette division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} X^4 & & +aX^2 & +bX & +c & X^2 + X + 1 \\ -X^4 & -X^3 & -X^2 & & & X^2 - X + a \\ \hline & -X^3 & (a-1)X^2 & +bX & +c & \\ & X^3 & +X^2 & +X & & \\ \hline & & aX^2 & (1+b)X & +c & \\ & & -aX^2 & -aX & -a & \\ \hline & & & (1-a+b)X & +(c-a) & \end{array}$$

Donc $X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + a) + (b + 1 - a)X + (c - a)$.

Ainsi, $X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si $\begin{cases} b + 1 - a = 0 \\ c - a = 0 \end{cases}$, c'est à

dire si et seulement si $\boxed{a = c = b + 1}$.

Solution 6 –

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = X^{2n} + X^n - 1$.

Le reste de la division euclidienne de P_n par $X - 2$ est $\widetilde{P}_n(2) = 2^{2n} + 2^n - 1$. Donc

$P_n(X) = Q_n(X)(X - 2) + (2^{2n} + 2^n - 1)$ avec $Q_n(X) \in \mathbb{K}[X]$.

Le reste de la division euclidienne de Q_n par $X + 2$ est $\widetilde{Q}_n(-2)$. On sait que

$$\widetilde{Q}_n(-2)(-2 - 2) + (2^{2n} + 2^n - 1) = \widetilde{P}_n(-2), \text{ donc}$$

$$-4\widetilde{Q}_n(-2) = (-2)^{2n} + (-2)^n - 1 - (2^{2n} + 2^n - 1)$$

$$= 2^n((-1)^n - 1)$$

$$\widetilde{Q}_n(-2) = 2^{n-2}(1 - (-1)^n)$$

Si n est pair, alors $\widetilde{Q}_n(-2) = 0$, donc il existe un polynôme R_n tel que $Q_n = R_n \times (X + 2)$ et on a $P_n = R_n \times (X + 2)(X - 2) + (2^{2n} + 2^n - 1)$. Ainsi,

si n est pair, le reste de la division de P_n par $X^2 - 4$ est $2^{2n} + 2^n - 1$.

Si n est impair, alors $\widetilde{Q}_n(-2) = 2^{n-1}$ donc il existe un polynôme R_n tel que $Q_n = R_n \times (X + 2) + 2^{n-1}$ et on a

$$P_n = [(X + 2)R_n + 2^{n-1}](X - 2) + (2^{2n} + 2^n - 1)$$

$$P_n = (X^2 - 4)R_n + 2^{n-1}X + 2^{2n} - 1$$

Comme $\deg(2^{n-1}X + 2^{2n} - 1) < \deg(X^2 - 4)$, $2^{n-1}X + 2^{2n} - 1$ est bien le reste de la division euclidienne de P_n par $X^2 - 4$. Ainsi,

si n est impair, le reste de la division de P_n par $X^2 - 4$ est $2^{n-1}X + 2^{2n} - 1$.

2. Pour $n \geq 2$, on pose $T_n = X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$. D'après la formule de Taylor en 1, on a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{T}_n^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k \\ &= \frac{\widetilde{T}_n^{(0)}(1)}{0!} (X - 1)^0 + \frac{\widetilde{T}_n^{(1)}(1)}{1!} (X - 1)^1 + \sum_{k=2}^n \frac{\widetilde{T}_n^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k \\ &= \widetilde{T}_n(1) + \widetilde{T}_n'(1)(X - 1) + (X - 1)^2 \sum_{k=2}^n \frac{\widetilde{T}_n^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^{k-2} \\ &= \widetilde{T}_n(1) + \widetilde{T}_n'(1)(X - 1) + (X - 1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\widetilde{T}_n^{(k+2)}(1)}{(k+2)!} (X - 1)^k \end{aligned}$$

Comme $\deg(\widetilde{T}_n(1) + \widetilde{T}_n'(1)(X-1)) \leq 1 < \deg(X-1)^2$, on a par unicité du reste de la division euclidienne que $\widetilde{T}_n(1) + \widetilde{T}_n'(1)(X-1)$ est le reste de la division euclidienne de T_n par $(X-1)^2$.

$$\widetilde{T}_n(1) = n+3.$$

$$\widetilde{T}_n'(1) = n + n(n-1) + 2 = n^2 + 2.$$

Donc le reste de la division euclidienne de T_n par $(X-1)^2$ est $[n^2 + 2]X - n^2 + n + 1$.

Solution 7 –

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ Remarquons que } X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2).$$

Le reste de X^n divisé par $X-1$ est $1^n = 1$. Donc il existe un polynôme Q tel que $X^n = (X-1)Q + 1$.

Le reste de Q divisé par $X-2$ est $\widetilde{Q}(2)$. En évaluant la relation précédente en 2, on a $2^n = \widetilde{Q}(2)(2-1) + 1$, donc $\widetilde{Q}(2) = 2^n - 1$. Ainsi, il existe un polynôme R tel que

$$X^n = [(X-2)R + 2^n - 1](X-1) + 1$$

$$X^n = (X-1)(X-2)R + (2^n - 1)X - 2^n + 2.$$

Donc,

le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est $(2^n - 1)X + 2^n - 2$.

$$3. A^n = R(A)(A^2 - 3A + 2I) + (2^n - 1)A - (2^2 - 2)I = (2^n - 1)A - (2^2 - 2)I. \text{ Donc}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -(2^n - 1) - (2^n - 2) & -2(2^n - 1) \\ 3(2^n - 1) & 4(2^n - 1) - (2^n - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3 & -2^{n+1} + 2 \\ 3 \cdot 2^n - 3 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}.$$

Solution 8 – 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n = (X+1)^n - nX - 1$.

$P_0 = 0$ et $P_1 = 0$, donc X^2 divise P_0 et P_1 .

Si $n \geq 2$:

$$\widetilde{P}_n(0) = 0.$$

$$P_n' = n(X+1)^{n-1} - n \text{ et } \widetilde{P}_n'(0) = 0.$$

Donc 0 est une racine de P_n de multiplicité au moins 2,

c'est à dire X^2 divise P_n .

2. Remarquons tout d'abord que $1 + X + X^2 = (X-j)(X-\bar{j})$ avec $j \in \mathbb{C}$. On rappelle que $(1 + X + X^2)(X-1) = X^3 - 1$ et que j est donc une racine 3-ième de l'unité. On a donc $j = e^{2i\pi/3}$.

Soient p, n, q entiers naturels tels que $P(X) = X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$. Alors

$$\widetilde{P}(j) = j^{3n} + j^{3p+1} + j^{3q+2} = 1 + j^{3p}j + j^{3q}j^2 = 1 + j + j^2 = 0$$

$$\widetilde{P}(\bar{j}) = \overline{\widetilde{P}(j)} = 0$$

Donc, j et $\bar{j}$ sont racines de $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$. Les racines de $1 + X + X^2$ sont aussi racines de $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$ avec au moins la même multiplicité (c'est à dire 1), donc

$X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$ est divisible par $1 + X + X^2$.

Solution 9 – $\widetilde{P}(0)^2 + \widetilde{P}(1)^2 + \widetilde{P}(4)^2 + \widetilde{P}(7)^2$ est une somme de réels positifs, donc est nulle si et seulement chaque terme est nul.

Ainsi, 0, 1, 4 et 7 sont des racines de P , qui a donc au moins 4 racines.

Or P est de degré inférieur ou égal à 3 et tout polynôme non-nul admet au plus autant de racines que son degré, donc

P est le polynôme nul.

Solution 10 – Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

On a $P' = 3aX^2 + 2bX + c$, $P'' = 6aX + 2b$ et $P''' = 6a$.

$$P(0) = d, P'(0) = c, P''(0) = 2b, P'''(0) = 6a.$$

$$\text{Donc } P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 1 \text{ssi } d = c = 1, b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{6}.$$

Donc, seul $P = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X + 1$ est le seul polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 1$.

Solution 11 –

1. Soit N une racine de P . Alors

$$n_d N^d + \dots + n_1 N + n_0 = 0$$

$$n_0 = N(-n_1 - n_2 N - \dots - n_d N^{d-1})$$

Donc

N divise n_0 .

2. D'après la première question, si $X^3 - X^2 - 109X - 11$ a une racine entière, elle divise 11, donc appartient à $\{1, -1, 11, -11\}$.

$$11^3 - 11^2 - 109 \cdot 11 - 11 = 11(121 - 11 - 109 - 1) = 0.$$

$$(-11)^3 - 11^2 + 109 \cdot 11 - 11 = 11(-121 - 11 + 109 - 1) = -11 \cdot 24 \neq 0.$$

$$1^3 - 1^2 - 109 - 11 = -120 \neq 0.$$

$$(-1)^3 - (-1)^2 + 109 - 11 = 96 \neq 0.$$

Donc

11 est la seule racine entière de $X^3 - X^2 - 109X - 11$.

D'après la question 2, si $X^{10} + X^5 + 1$ a une racine entière, elle divise 1, donc ne peut être que 1 ou -1 . $1^{10} + 1^5 + 1 = 3 \neq 0$ et $(-1)^{10} + (-1)^5 + 1 = 1 \neq 0$, donc $X^{10} + X^5 + 1$ n'a pas de racine entière.

Solution 12 –

$$\begin{array}{r|l}
 2X^4 & +X^3 & -X^2 & +2X & -1 & 4X^3 + 4X^2 - X - 1 \\
 -(2X^4 & +2X^3 & -\frac{1}{2}X^2 & -\frac{1}{2}X) & & \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} \\
 \hline
 & -X^3 & -\frac{1}{2}X^2 & +\frac{5}{2}X & -1 & \\
 & -(-X^3 & -X^2 & +\frac{1}{4}X & +\frac{1}{4}) & \\
 \hline
 & & \frac{1}{2}X^2 & +\frac{9}{4}X & -\frac{5}{4} &
 \end{array}$$

On a donc $A = \left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)B + \frac{1}{2}X^2 + \frac{9}{4}X - \frac{5}{4}$. Ainsi, une racine commune de A et B est aussi une racine du reste de cette division euclidienne.

On cherche donc les racines de $\frac{1}{2}X^2 + \frac{9}{4}X - \frac{5}{4}$, ou plutôt de $2X^2 + 9X - 5$, qui sont les mêmes.

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 121$, donc les racines de $2X^2 + 9X - 5$ sont -5 et $\frac{1}{2}$.

Si on pense à l'exercice précédent, -5 ne peut pas être racine de A ou B . On teste donc $\frac{1}{2}$.

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 - 1 = 0$$

$$\tilde{B}\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Ainsi A et B admettent $\frac{1}{2}$ comme racine commune.

Solution 13 – Une racine double de P est aussi une racine de P' . Or $P' = 6X^2 - 34X + 40$. On va déterminer les racines de $\frac{1}{2}P' = 3X^2 - 17X + 20$.

Le discriminant de $\frac{1}{2}P'$ est 49 et ses racines sont donc $\frac{5}{3}$ et 4.

On remarque que $\tilde{P}(4) = 2 \times 64 - 17 \times 16 + 40 \times 4 - 16 = 16(8 - 17 + 10 - 1) = 0$

Donc 4 est une racine au moins double de P . En considérant P comme un polynôme complexe, on sait que P a trois racines comptées avec multiplicité. En notant α la dernière racine,

on a d'après les relations coefficients-racines que

$$4 + 4 + \alpha = \frac{17}{2}$$

et donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Finalement, P admet comme racines 4 (double) et $\frac{1}{2}$ (simple).

Solution 14 –

$$\begin{array}{r|l}
 6X^4 & -49X^3 & +123X^2 & -98X & +24 & X^2 - 7X + 12 \\
 -(6X^4 & -42X^3 & +72X^2) & & & 6X^2 - 7X + 2 \\
 \hline
 & -7X^3 & +51X^2 & -98X & +24 & \\
 & -(-7X^3 & +49X^2 & -84X) & & \\
 \hline
 & & 2X^2 & -14X & +24 & \\
 & & -(2X^2 & -14X & +24) & \\
 \hline
 & & & & 0 &
 \end{array}$$

Donc $P = (X^2 - 7X + 12)(6X^2 - 7X + 2)$. Les racines de $X^2 - 7X + 12$ sont 3 et 4 et les racines de $6X^2 - 7X + 2$ sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

Ainsi, les racines de P sont 3, 4, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

Solution 15 –

1.

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(1+i) &= (1+i)^3 - (4+i)(1+i)^2 + (6+2i)(1+i) - (4+2i) \\
 &= (1+3i-3-i) - 2i(4+i) + 6+6i+2i-2-4-2i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc $(1+i)$ est racine de P . On factorise P en effectuant la division euclidienne de P par $X - (1+i)$.

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 & -(4+i)X^2 & +(6+2i)X & -(4+2i) & X - (1+i) \\
 -X^3 & +(1+i)X^2 & & & X^2 - 3X + (3-i) \\
 \hline
 & -3X^2 & +(6+2i)X & -(4+2i) & \\
 & 3X^2 & -3(1+i)X & & \\
 \hline
 & & (3-i)X & -(4+2i) & \\
 & & -(3-i)X & +(1+i)(3-i) & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}$$

On obtient $P = (X - (1 + i))(X^2 - 3X + (3 - i))$.

$X^2 - 3X + (3 - i)$ a pour discriminant $\Delta = -3 + 4i$, dont une racine est $\delta = 1 + 2i$. Ses racines sont donc $x_1 = \frac{3-1-2i}{2} = 1 - i$ et $x_2 = \frac{+3+1+2i}{2} = 2 + i$. Donc

$$P = (X - (1 + i))(X - (1 - i))(X - (2 + i)).$$

2. $\tilde{Q}(i) = 1 + 5i - 7 - 5i + 6 = 0$. Donc i est racine de Q .

Q est un polynôme réel, donc $\bar{i} = -i$ est également racine de Q . On en déduit que Q est divisible par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^4 & -5X^3 & +7X^2 & -5X & +6 & X^2 + 1 \\ -X^4 & & -X^2 & & & X^2 - 5X + 6 \\ \hline & -5X^3 & +6X^2 & -5X & +6 & \\ & 5X^3 & & +5X & & \\ \hline & & 6X^2 & & +6 & \\ & & -6X^2 & & -6 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

$X^2 - 5X + 6$ est un polynôme de degré 2. La somme de ses racines est 5 et leur produit est 6. Donc $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$.

Comme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$,

$$\text{la décomposition de } Q \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ est } Q = (X - 2)(X - 3)(X^2 + 1).$$

$$\text{Dans } \mathbb{C}[X], Q = (X - 2)(X - 3)(X - i)(X + i).$$

Solution 16 –

1. $\tilde{P}_1(1) = 1 - 2 + 1 - 4 + 4 = 0$ donc 1 est racine de P_1 .

$\tilde{P}_1(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$ donc 2 est racine de P_1 .

P_1 est donc divisible par $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$. Cherchons le quotient de cette division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} X^4 & -2X^3 & +X^2 & -4X & +4 & X^2 - 3X + 2 \\ -X^4 & +3X^3 & -2X^2 & & & X^2 + X + 2 \\ \hline & X^3 & -X^2 & -4X & +4 & \\ & -X^3 & +3X^2 & -2X & & \\ \hline & & 2X^2 & -6X & +4 & \\ & & -2X^2 & +6X & -4 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

Donc $P_1 = (X^2 + X + 2)(X - 1)(X - 2)$.

$X^2 + X + 2$ a pour discriminant $\Delta = -7$, donc est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

$$\text{La Décomposition de } P_1 \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ est } P_1 = (X - 1)(X - 2)(X^2 + X + 2).$$

$\delta = \sqrt{7}i$ est une racine de Δ et les racines de $X^2 + X + 2$ sont $x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$. On en déduit la décomposition de P_1 dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_1 = (X - 1)(X - 2) \left(X + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \right) \left(X + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \right).$$

2. Les racines de P_2 sont les racines 4-ièmes de l'unité :

$$P_2 = (X + 1)(X - 1)(X - i)(X + i) \text{ est la décomposition de } P_2 \text{ dans } \mathbb{C}[X].$$

$(X - i)(X + i) = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$ puisqu'il n'a pas de racines réelles. Donc

$$P_2 = (X + 1)(X - 1)(X^2 + 1) \text{ est la décomposition de } P_2 \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$

3. Les racines de P_5 sont les racines 5-ièmes de -1 , c'est à dire -1 , $e^{i\pi/5}$, $e^{-i\pi/5}$, $e^{3i\pi/5}$, $e^{-3i\pi/5}$. D'où la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_3 = (X + 1)(X - e^{i\pi/5})(X - e^{-i\pi/5})(X - e^{3i\pi/5})(X - e^{-3i\pi/5}).$$

$(X - e^{i\pi/5})(X - e^{-i\pi/5}) = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)X + 1 \right)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car de degré 2 sans racine réelle.

$$\text{De même pour } (X - e^{3i\pi/5})(X - e^{-3i\pi/5}) = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)X + 1 \right).$$

$$\text{Dans } \mathbb{R}[X], P_3 = (X + 1) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)X + 1 \right) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)X + 1 \right).$$

4. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$, donc

$$X^2 + X + 1 = (X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3}).$$

En composant X^2 par cette égalité

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - e^{2i\pi/3})(X^2 - e^{-2i\pi/3})$$

Décomposons ces deux facteurs :

$X^2 - e^{2i\pi/3}$ a pour racines les racines carrées de $e^{2i\pi/3}$, c'est à dire $e^{i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$. D'où $X^2 - e^{2i\pi/3} = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{4i\pi/3})$.

De même, $X^2 - e^{-2i\pi/3} = (X - e^{-i\pi/3})(X - e^{-4i\pi/3})$.

D'où la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_4 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{4i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X - e^{-4i\pi/3}).$$

$$\begin{aligned}
 X^4 + X^2 + 1 &= (X - e^{i\pi/3})(X - e^{4i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X - e^{-4i\pi/3}) \\
 &= \left[(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) \right] \left[(X - e^{4i\pi/3})(X - e^{-4i\pi/3}) \right] \\
 &= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1 \right) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)X + 1 \right) \\
 &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)
 \end{aligned}$$

$X^2 - X + 1$ et $X^2 + X + 1$ sont des polynômes réels de degré 2 sans racine réelles donc sont irréductibles. Ainsi,

dans $\mathbb{R}[X]$, $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

Solution 17 –

1. $P(p/q) = 0$ donne

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Puisque $p \mid a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1}$, on a $p \mid a_0 q^n$ or $p \wedge q = 1$ donc $p \mid a_0$. De même $q \mid a_n$.

2. Si P admet un racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ alors $p \in \{-5, -1, 1, 5\}$ et $q \in \{1, 2\}$. $-\frac{5}{2}$ est racine de P .

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5 = (2X + 5)(X^2 - 3X + 1) = (2X + 5) \left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Solution 18 – Soit a une racine multiple de P . Alors $\tilde{P}(a) = 0$ et $\tilde{P}'(a) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \tilde{P}(a) &= 0 \\ \tilde{P}'(a) &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8(1-i)a - 12 &= 0 \\ 4a^3 + 8(1-i) &= 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8(1-i)a &= 12 \\ 4a^4 + 8(1-i)a &= 0 \end{cases} \text{ car } 0 \text{ n'est pas racine de } P \text{ donc } a \neq 0. \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8(1-i)a &= 12 \\ -24(1-i)a &= -48 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8(1-i)a &= 12 \\ a &= \frac{2}{(1-i)} = 1+i \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4i-6-4i+1+8+8i &= 12 \\ a &= 1+i \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow a = 1+i
 \end{aligned}$$

Donc $a + 1$ est racine de P de multiplicité au moins 2 donc P est divisible par $(X - (1 + i))^2 = X^2 - 2(1 + i)X + 2i$.

Effectuons la division euclidienne de P par $X^2 - 2(1 + i)X + 2i$:

X^4					$X^2 - 2(1 + i)X + 2i$
$-X^4$	$+2(1 + i)X^3$	$-2iX^2$	$+8(1 - i)X$	-12	$X^2 + 2(1 + i)X + 6i$
	$2(1 + i)X^3$	$-2iX^2$	$+8(1 - i)X$	-12	
	$-2(1 + i)X^3$	$-4(1 + i)^2 X^2$	$+4i(1 + i)X$		
		$6iX^2$	$12(1 - i)X$	-12	
		$-6iX^2$	$+12i(1 + i)X$	$-2i6i$	
				0	

Donc

$$X^4 + 8(1 - i)X - 12 = (X^2 - 2(1 + i)X + 2i)(X^2 + 2(1 + i)X + 6i).$$

Le discriminant de $X^2 + 2(1 + i)X + 6i$ est $\Delta = -16i$, dont une racine est $\delta = 2\sqrt{2}(i - 1)$. Ses racines sont donc

$$x_1 = \frac{-(2 + 2i) + 2\sqrt{2}(i - 1)}{2} = -(\sqrt{2} + 1) + i(\sqrt{2} - 1)$$

$$x_2 = \frac{-(2 + 2i) - 2\sqrt{2}(i - 1)}{2} = (\sqrt{2} - 1) - i(1 + \sqrt{2}).$$

On a donc

$P = (X - (1 + i))^2 (X - x_1)(X - x_2)$

Solution 19 –

- Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a < b$) est continue, dérivable sur $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Si x_0 est racine de multiplicité m de P alors x_0 est racine de multiplicité $m - 1$ de P' (en convenant qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine).
- Notons $x_1 < \dots < x_p$ les racines de P et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives. Puisque le polynôme P est supposé scindé, on a

$$m_1 + \dots + m_p = \deg P$$

Les éléments $x_1, \dots, x_p$ sont racines de multiplicités $m_1 - 1, \dots, m_p - 1$ de P' . En appliquant le théorème de Rolle à P entre x_k et x_{k+1} , on détermine $y_k \in]x_k; x_{k+1}[$ racine de P' . Ces y_k sont distincts entre eux et distincts des $x_1, \dots, x_p$. On a ainsi obtenu au moins

$$(p - 1) + (m_1 - 1) + \dots + (m_p - 1) = \deg P - 1$$

racines de P' . Or $\deg P' = \deg P - 1$ donc P' est scindé.

Solution 20 – On procède par récurrence. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n : " \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P}_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}."$$

Initialisation : D_0 est vraie avec $P_0 = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que D_n est vraie. Donc il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P}_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$$

En dérivant cette relation,

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= \frac{\left[\widetilde{P}_n'(x) e^{-1/x} + \widetilde{P}_n(x) \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \right] x^{2n} - \widetilde{P}_n(x) 2n x^{2n-1} e^{-1/x}}{x^{4n}} \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^{4n}} \left(\left[\widetilde{P}_n'(x) + \widetilde{P}_n(x) \frac{1}{x^2} \right] x^{2n} - \widetilde{P}_n(x) 2n x^{2n-1} \right) \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^{2n+2}} \left(\left[\widetilde{P}_n'(x) + \widetilde{P}_n(x) \frac{1}{x^2} \right] x^{2n} - \widetilde{P}_n(x) 2n \frac{x^{2n-1}}{x^{2n-2}} \right) \end{aligned}$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^{2n+2}} \left(x^2 \widetilde{P}_n'(x) + \widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_n(x) 2n x \right)$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^{2n+2}} \widetilde{P}_{n+1}(x)$$

en posant $P_{n+1} = X^2 P_n' + P_n(1 - 2nX)$, qui est bien un polynôme.

Donc D_{n+1} est vraie.

Par récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P}_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}.$$

Solution 21 – Notons x_1, x_2, x_3, x_4 les racines du polynôme considéré avec $x_1 + x_2 = 2$.

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0 \\ \sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -12 \\ \sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 = -5 \end{cases}$$

σ_1 donne $x_3 + x_4 = -2$, σ_2 donne $x_1 x_2 + x_3 x_4 = 4$ et σ_3 donne $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 6$. On obtient $x_1 x_2 = 5$ et $x_3 x_4 = -1$. x_1 et x_2 sont les racines de $X^2 - 2X + 5$ i.e. $1 \pm 2i$. x_3 et x_4 sont les racines de $X^2 + 2X - 1$ i.e. $-1 \pm \sqrt{2}$.

Solution 22 – Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$.

Si Q est nul, alors $P^2 = 0$ et $P = 0$. Ils vérifient bien $P^2 = XQ^2$.

Si Q est non nul, on note $d \in \mathbb{N}$ son degré. P^2 est alors non-nul et donc P est non nul. On note $d' \in \mathbb{N}^*$ son degré.

Si $P^2 = XQ^2$, alors en regardant les degrés des polynômes, on a :

$$2d = 2d' + 1$$

Ce qui est absurde, car ils sont de parité différente. $P^2 \neq XQ^2$

Donc le seul couple (P, Q) satisfaisant $P^2 = XQ^2$ est $(0, 0)$.

Solution 23 – Le polynôme nul est solution.

On procède par analyse-synthèse :

Analyse : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non-nul tel que $18P = P'P''$.

Si P est de degré 1 ou 2, alors $P'P''$ est nul, ce qui est absurde. Si P est de degré $d \geq 3$, alors on a, en prenant le degré de l'équation, $d = (d-1) + (d-2)$ et donc $d = 3$.

On remarque ensuite que si P' admet une racine α , alors $18\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}'(\alpha)\tilde{P}''(\alpha) = 0$, donc α est aussi une racine de P avec multiplicité 1 de plus que sa multiplicité en temps que racine de P' .

P' est de degré 2. S'il admet deux racines distinctes, cela signifie que P admet deux racines au moins doubles, ce qui est absurde car P admet au maximum trois racines comptées avec leur multiplicité.

Donc P' admet une unique racine double α et alors α est racine triple de P . Comme P est de degré 3, on en déduit que P s'écrit $P = \lambda(X - \alpha)^3$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En injectant dans la relation, on trouve

$$18\lambda(X - \alpha)^3 = \lambda 3(X - \alpha)^2 \lambda 6(X - \alpha)$$

En simplifiant par $\lambda(X - \alpha)^3$, on en déduit $1 = \lambda$

Finalement, P est de la forme $(X - \alpha)^3$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Synthèse : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P = (X - \alpha)^3$. Alors $P' = 3(X - \alpha)^2$ et $P'' = 6(X - \alpha)$, donc $P'P'' = 18(X - \alpha)^3 = 18P$.

Conclusion : Les solutions sont donc le polynôme nul et ceux de la forme $(X - \alpha)^3$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Solution 24 – Soient P dans $\mathbb{C}[X]$.

Si P est constant, alors $P \circ P = P$

Si P est non-constant, on note $d \in \mathbb{N}^*$ son degré. $P \circ P$ est alors non-nul et de degré d^2 .

Si $P \circ P = P$, on a $d^2 = d$, donc $d = 1$. Donc P est de la forme $aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

$P \circ P = (a(aX + b) + b) = a^2 X + (ab + b) = aX + b$

$$P \circ P = P \Leftrightarrow a^2 = a \text{ Et } ab + b = b$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ Et } b = 0$$

$$P = X$$

Les polynômes vérifiant $P \circ P = P$ sont donc les polynômes constants et X .

Solution 25 –

1. Soient i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $i = j$, alors $\widetilde{Q}_j(a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$. $\widetilde{Q}_j(a_j) = 1$

Si $i \neq j$, alors $\widetilde{Q}_j(a_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 1$. En particulier, pour $k = i$, $\frac{a_i - a_i}{a_j - a_i} = 0$, donc un

terme du produit est nul et $\widetilde{Q}_j(a_i) = 0$.

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors,

$$\widetilde{L}(a_k) = \sum_{j=1}^n b_j \widetilde{Q}_j(a_k).$$

D'après la question précédente, le seul terme non-nul de cette somme est $b_k \widetilde{Q}_k(a_k) = b_k$. Donc $\widetilde{L}(a_k) = b_k$.

3. Soit P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\widetilde{P}(a_k) = b_k$.
 Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Q_j est le produit de $n - 1$ polynômes de degré 1, donc est degré $n - 1$.
 L est une somme de polynôme de degré $n - 1$, donc est degré inférieur ou égal à $n - 1$.
 Donc $P - L$ est de degré au plus $n - 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\widetilde{(P - L)}(a_k) = b_k - b_k = 0$.
 Donc $P - L$ a au moins n racines, c'est à dire plus que son degré. Donc $P - L = 0$ et $P = L$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\widetilde{P}(a_k) = b_k$.
 Donc a_k est racine de $P - L$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi,

$$\prod_{k=1}^n (X - a_k) \mid P - L.$$

Donc, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = L + Q \prod_{k=1}^n (X - a_k)$.

Solution 26 –

1. $P_2 = X, P_3 = X^2 - 1, P_4 = X^3 - 2X$.

2. La proposition est vraie pour $n = 0$.

On procède ensuite par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n : " P_n est de degré $n - 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de coefficient dominant 1".

Initialisation : A_1 et A_2 sont vraies par la première question.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ fixé. On suppose que A_n et A_{n-1} sont vraies. Alors P_n et P_{n-1} sont non-nuls donc on peut écrire :

$$P_n = X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \quad P_{n-1} = X^{n-2} + \sum_{k=0}^{n-3} b_k X^k$$

où $a_0, \dots, a_{n-2}$ et $b_0, \dots, b_{n-3}$ sont des entiers. Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= X P_n - P_{n-1} \\ &= X^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^{k+1} - X^{n-2} - \sum_{k=0}^{n-3} b_k X^k \\ &= X^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} X^k - X^{n-2} - \sum_{k=0}^{n-3} b_k X^k \\ &= X^n + a_{n-2} X^{n-1} + (1 + a_{n-3}) X^{n-2} + \sum_{k=1}^{n-3} (a_{k-1} - b_k) X^k - b_0 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est de degré n et de coefficient dominant 1. De plus a_{n-2} , $(1 + a_{n-3})$ et $-b_0$ sont entiers et pour tout $k \in \llbracket 1, n - 3 \rrbracket$, $a_{k-1} - b_k$ est entier. Donc les coefficients de P_{n+1} est entier.

Donc A_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

P_n est de degré $n - 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de coefficient dominant 1.

3. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose B_n : " $\widetilde{P_{2n}}$ est impaire et $\widetilde{P_{2n+1}}$ est paire."

Initialisation : $x \mapsto 0$ est impaire et $x \mapsto 1$ est paire donc B_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que B_n est vraie, c'est à dire que $\widetilde{P_{2n}}$ est impaire et $\widetilde{P_{2n+1}}$ est paire. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{P_{2n+2}}(-x) &= -x \widetilde{P_{2n+1}}(-x) - \widetilde{P_{2n}}(-x) \\ &= -x \widetilde{P_{2n+1}}(x) + \widetilde{P_{2n}}(x) \text{ par hypothèse de rec.} \\ &= -(x \widetilde{P_{2n+1}}(x) - \widetilde{P_{2n}}(x)) \\ &= -\widetilde{P_{2n+2}}(x) \end{aligned}$$

Donc $\widetilde{P_{2n+2}}$ est impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{P_{2n+3}}(-x) &= -x \widetilde{P_{2n+2}}(-x) - \widetilde{P_{2n+1}}(-x) \\ &= x \widetilde{P_{2n+2}}(x) - \widetilde{P_{2n+1}}(x) \text{ par hypothèse de rec.} \\ &= \widetilde{P_{2n+3}}(x) \end{aligned}$$

Donc $\widetilde{P_{2n+3}}$ est paire et B_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_{2n}}$ est impaire et $\widetilde{P_{2n+1}}$ est paire. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a la même parité que $n - 1$.

4. Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n : "P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}"$.

Initialisation : $P_1^2 = 1$ et $1 + P_0 P_2 = 1$, donc C_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose C_n vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1 + P_{n+1} P_{n+3} &= 1 + P_{n+1} (X P_{n+2} - P_{n+1}) \\ &= 1 + X P_{n+1} P_{n+2} - P_{n+1}^2 \\ &= 1 + X P_{n+1} P_{n+2} - (1 + P_n P_{n+2}) \text{ par hypothèse de rec.} \\ &= 1 + X P_{n+1} P_{n+2} - 1 - P_n P_{n+2} \\ &= P_{n+2} (X P_{n+1} + P_n) \\ &= P_{n+2}^2 \end{aligned}$$

Donc C_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_{n+1})^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.

Soit a une racine de P_n . Alors $\widetilde{P_{n+1}}^2(a) = 1 + \widetilde{P_n}(a) \widetilde{P_{n+2}}(a) = 1$. Donc $\widetilde{P_{n+1}}^2(a) \neq 0$. Aucune racine de P_n n'est une racine de P_{n+1} , donc

$\widetilde{P_n}$ et $\widetilde{P_{n+1}}$ n'ont aucune racine commune.

Solution 27 –

1. On calcule $P_2 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$, $P_3 = -64X^7 + \dots$. On conjecture alors le résultat qu'on démontre par récurrence double.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $H_n : « \text{le degré de } P_n \text{ est } 2n + 1 \text{ et son coefficient dominant est } (-4)^n »$.

H_0 et H_1 sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Alors $\deg(2(1 - 2X)^2 P_{n+1}) = 2 + 2(n + 1) + 1 = 2n + 5 = 2(n + 2) + 1$. Comme $\deg(P_n) = 2n + 1 < 2(n + 2) + 1$, on en déduit que $\deg(P_{n+2}) = 2(n + 2) + 1$. On remarque ensuite que le coefficient dominant est celui de P_{n+1} multiplié par -4 , d'où, d'après H_{n+1} , $(-4) \times (-4)^{n+1} = (-4)^{n+2}$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons α_n le terme constant de P_n et posons $H_n : « \alpha_n = 0 »$.

H_0 et H_1 sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Le terme constant de $2(1 - 2X^2)P_{n+1}$ est $2\alpha_{n+1}$, tandis que celui de P_n est α_n . On en déduit $\alpha_{n+2} = 2\alpha_{n+1} - \alpha_n$, puis α_{n+2} en utilisant H_{n+1} et H_{n+2} .

Le principe de récurrence permet de conclure que le terme constant de P_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit que $X \mid P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\sin(3\theta) = \Im(e^{3i\theta}) = \Im((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3) = 3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)^3 = 3 \sin(\theta) - 4 \sin(\theta)^3$.
4. Récurrence double. Pour l'initialisation on utilise la question précédente, et pour l'hérédité :

$$\begin{aligned} \sin((2n+5)\theta) &= \sin((2n+3)\theta + 2\theta) \\ &= \sin((2n+3)\theta) \cos(2\theta) + \cos((2n+3)\theta) \sin(2\theta) \\ &= \sin((2n+1)\theta) \cos(2\theta)^2 + \cos((2n+1)\theta) \sin(2\theta) \cos(2\theta) + \\ &\quad \cos((2n+1)\theta) \cos(2\theta) \sin(2\theta) - \sin((2n+1)\theta) \sin(2\theta)^2 \\ &= \sin((2n+1)\theta) \cos(4\theta) + \cos((2n+1)\theta) \sin(4\theta). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2(1 - 2 \sin(\theta)^2) \sin((2n+3)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \\ &= 2 \cos(2\theta) \sin((2n+1)\theta) \cos(2\theta) + 2 \cos(2\theta) \cos((2n+1)\theta) \sin(2\theta) - \sin((2n+1)\theta) \\ &= (2 \cos(2\theta)^2 - 1) \sin((2n+1)\theta) + \sin(4\theta) \cos((2n+1)\theta) \\ &= \cos(4\theta) \sin((2n+1)\theta) + \sin(4\theta) \cos((2n+1)\theta). \end{aligned}$$

Donc H_{n+2} est vraie.

5. (a) La relation définit P_n sur $[-1; 1]$, qui est infini, donc définit P_n de manière unique (si Q est un autre polynôme vérifiant cette relation, alors pour tout $x \in [-1; 1]$, $P(x) = Q(x)$, puis $(P - Q)(x)$ possède une infinité de racines, puis $P = Q$).
- (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\sin((2n+1)\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2n+1} \right] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{2n+1}.$$

- (c) On déduit de la question précédente que l'ensemble des racines de P est $\left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Or $\sin$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$, donc

$$\text{Card}\left(\left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}\right) = 2n+1.$$

Or P_n est un polynôme de degré $2n+1$, donc l'ensemble précédent contient exactement les $2n+1$ racines distinctes de P_n . De plus, le coefficient dominant de P_n est $(-4)^n$, d'où

$$P_n = (-4)^n \prod_{k=-n}^n \left(X - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right).$$

Solution 28 –

1. $f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x, f_2 : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $f_3 : x \mapsto 4x^3 - 3x$
2. Soit $x \in [-1, 1]$. $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta \cos n\theta = 2xf_n(x)$ en posant $\theta = \arccos x$.
3. Existence : Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
 Pour $n = 0$ et $n = 1$: $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ conviennent.
 Supposons le résultat établi aux rangs $n-1$ et $n \geq 1$.
 Soit T_{n+1} le polynôme défini par $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.
 On a $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = f_{n+1}(x)$.
 Le polynôme T_{n+1} convient. Récurrence établie.
 Unicité : Si T_n et R_n conviennent, alors ceux-ci prennent mêmes valeurs en un infinité de points, ils sont donc égaux.
4. Comme $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, on montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg T_n = n$.
 Il est alors aisé de montrer, par récurrence simple, que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 Notons que le coefficient dominant de T_0 est 1.
5. Résolvons l'équation $T_n(x) = 0$ sur $[-1; 1]$:
 $\cos(n \arccos x) = 0 \iff n \arccos x = \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \arccos x = \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right]$
 Posons $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ définis par $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ forment n racines distinctes appartenant à $] -1; 1[$ du polynôme T_n .
 Or $\deg T_n = n$ donc il ne peut y avoir d'autres racines et celles-ci sont nécessairement simples.

Solution 29 – Par la formule de dérivation de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} (e^{-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^k e^{-x}$$

donc

$$L_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} X^k$$

est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!