EXERCICES — CHAPITRE 18

Exercice 1 (♥) – Vrai ou faux? Justifier. Soient $d, n, a \in \mathbb{Z}$.

1. 45 possède 12 diviseurs.
2. Si $n \equiv 1$ [35], alors n est impair.
3. Si a et b divisent d, alors ab aussi.
4. Si d divise ab, alors d divise a ou d divise b.
5. L'intervalle d'entiers $[\![1, 1000]\!]$ contient 140 entiers divisibles par 7.
6. Pour tous $p, q \in \mathbb{P}$, si $q - p = 11$, alors $p = 2$ et $q = 13$.
7. Si d divise n^2, alors d divise n.
8. Si $a^2 \equiv 1[n]$, alors $a \equiv \pm 1[n]$.
9. Si $4a \equiv 4b[13]$, alors $a \equiv b[13]$.
10. Si $4a \equiv 4b[6]$, alors $a \equiv b[6]$.
11. Si $a \equiv b[n]$, alors $d^a \equiv d^b[n]$.
12. Si $a \equiv b$ [6], alors $2^a \equiv 2^b$ [9].
13. Si tout diviseur premier de n est congru à ± 1 modulo 8 , alors $n \equiv \pm 1$ [8]. Et la réciproque?

Exercice 2 (♣) –

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $n^3 - n$ est divisible par 6.
2. Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 9.

Exercice 3 (♣) – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 4 (♥) – Soit n un entier naturel.

1. Montrer que pour tout entiers naturels a, b et p, si $a \equiv b[p]$ alors $a^n \equiv b^n[p]$.
2. Montrer que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 5 (♥) – Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

$$(E_1)\ xy = 2x + 3y \qquad (E_2)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \qquad (E_3)\ x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$$

Exercice 6 (♣) – Déterminer deux entiers naturels a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47.

Exercice 7 (♣) – On note n un entier naturel tel que :

1. Si on divise 2003 par n, le reste est de 8.
2. Si on divise 3002 par n, le reste est de 27.

Que vaut n?

Exercice 8 (♠) – On divise deux entiers naturels distincts a et b avec $a > b$ par leur différence $a - b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

Exercice 9 (♣) – Déterminer le pgcd et les coefficients de l'égalité de Bézout des entiers a et b suivants :

1. $a = 33$ et $b = 24$
2. $a = 37$ et $b = 27$
3. $a = 270$ et $b = 105$.

Exercice 10 (♥) – Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence :

$$(\exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = d) \iff a \wedge b \mid d.$$

Exercice 11 (♥) – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, l'entier $5^n - 3^n$ n'est pas premier.

Exercice 12 (♠) – Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on note q le quotient de la division euclidienne de $(a-1)$ par b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

Exercice 13 (♠) –

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un couple unique $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
2. Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.
3. En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 14 (♠) – Soient $a, b \in \mathbb{N}$.

Montrer que si a et b ont la même parité, alors $\dfrac{a^3 + b^3}{2}$ est un entier non-premier.

Exercice 15 (♥) – Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, aucun des entiers

$$n! + 2,\ n! + 3,\ \ldots,\ n! + n$$

n'est premier. Que peut-on en déduire?

Exercice 16 (Nombres de Mersenne et nombres parfaits) **(♠) –**

1. Soit a et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $M = a^p - 1$ est un nombre premier. Montrer que $a = 2$.
2. (a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
   (c) Que pensez-vous de la réciproque ?
3. On suppose que p est premier et $M = 2^p - 1$ est également premier.
   Montrer que $2^{p-1}M$ est un nombre parfait. Un nombre n est dit parfait si la somme de ses diviseurs est égale à son double.

Exercice 17 (♦) –

1. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\begin{cases} x \wedge y &= 3 \\ x + y &= 21 \end{cases}$.
2. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\begin{cases} x \wedge y &= 6 \\ x \vee y &= 72 \end{cases}$.

Exercice 18 (♠) – Soit $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe la somme de diviseurs positifs de n.

1. Soit $p \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sigma\left(p^\alpha\right)$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux.
   Montrer que tout diviseur positif d du produit ab s'écrit de manière unique $d = d_1 d_2$ avec d_1 et d_2 diviseurs positifs de a et b.
3. En déduire que si a et b sont premiers entre eux alors $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.
4. Exprimer $\sigma(n)$ en fonction de la décomposition primaire de n.

Exercice 19 (♠) – Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note r et q respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b.

1. Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.
2. En déduire que $\left(2^a - 1\right) \wedge \left(2^b - 1\right) = 2^{a \wedge b} - 1$

Exercice 20 (♠) –

1. Montrer que $v_2(1000!) = 994$.
2. Plus généralement, calculer $v_p(n!)$. On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 21 (Nombres de Carmichael) **(♠) –** Soit n un entier supérieur à 2 . On suppose que n pour tout facteur premier p de n, p^2 ne divise pas n mais $p - 1$ divise $n - 1$. Établir

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a^n \equiv a[n]$$

Quelques vidéos pour se cultiver:
Un peu d'histoire sur les conjectures des nombres premiers :
Les nombres premiers - - Science Etonnante

Un détour par la cryptographie :
L'Algorithme qui Sécurise Internet (entre autres...) - - Science Etonnante

♣ Du trèfle à brouter...
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♥ À connaître par cœur.
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !