

EXERCICES — CHAPITRE 17

Exercice 1 (♣) – Expliciter $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans les cas suivants :

- a) $\forall i, j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, a_{ij} = \max(i, j);$ c) $\forall i, j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, a_{ij} = \left\lfloor \frac{i+j}{4} \right\rfloor;$
 b) $\forall i, j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, a_{ij} = |i - j|;$ d) $\forall i, j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 2 (♣) – On considère la matrice : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer les matrices :

$$X - 2I_3 \quad - (X - 2I_3)$$

$$I_3 - 2X \quad 4(I_3 - X)$$

Exercice 3 (♣) – On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer et comparer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A + B)^2$.

Exercice 4 (♣) – Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible, et dans ce cas donner la dimension de la matrice produit. Lorsque c'est impossible, le justifier.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (♣) – Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, calculer leur inverse.

$$1. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$7. G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (♥) – On note $I = I_3$ et on donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Calculer A^2 , puis A^3 .
(b) En déduire que A n'est pas inversible.
- (a) Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$.
(b) En déduire que $I - A$ est inversible et donner son inverse.
- Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 7 (♥) – On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer A^3 . En déduire que A est inversible et donner son inverse.
- Calculer B^3 . La matrice B est-elle inversible?

Exercice 8 (♥) –

$$1. \text{ On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $-A^3 - 3A^2 - 3A$.

(b) La matrice A est-elle inversible? Si oui, expliciter son inverse.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^3 - A$.

(b) La matrice A est-elle inversible? Si oui, expliciter son inverse.

Exercice 9 (♥) – Soient α, β et γ trois réels. On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $C^3 - \gamma C^2 - \beta C - \alpha I_3 = 0_3$.

2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, alors C est inversible. Donner son inverse.

3. Montrer que si $\alpha = 0$ alors C n'est pas inversible.

Exercice 10 (♥) –

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

2. Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2) suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} -3x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = -2 \\ -3x + 4y - 8z = 4 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} -3x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ -3x + 4y - 8z = 3 \end{cases}$$

Exercice 11 (♥) – Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice tAA est symétrique.

2. Montrer que si X est symétrique, ${}^tAX + XA$ est symétrique.

3. Montrer que si X est antisymétrique, ${}^tAX + XA$ est antisymétrique.

Exercice 12 (♥) – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $R(\alpha)R(\beta)$.

2. Démontrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et calculer son inverse.

3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $R(\theta)^n$.

Exercice 13 (♥) – Montrer que toute matrice carrée peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 14 (♥) – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k .

2. Calculer $(A+B)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 (♦) – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où a et b et c sont trois nombres réels (on pourra commencer par le cas où $a = b$).

Exercice 16 (♥) – Dans chacun des cas suivants, calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{ll} 1. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 3. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 4. C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 17 (♥) – On considère la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J^n = 6^{n-1} J$$

Exercice 18 (♠) – On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels λ et μ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$.

2. Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que :

$$A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3$$

3. Vérifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n .

Exercice 19 (♥) – On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ Et } B = A - 2I_3$$

1. Calculer B et B^2 .
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} B$$

Exercice 20 (♦) – Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les matrices $S = (s_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ définies par

$$\forall (i, j) \in ([1, n])^2 \quad p_{i,j} = ij \quad \text{et} \quad s_{i,j} = \begin{cases} i+j & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le produit SP pour $n = 4$.
2. Calculer les coefficients de la matrice SP dans le cas général.

Exercice 21 (♥) – Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ et $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Exercice 22 (♥) –

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $D = P^{-1}MP$.

Démontrer que pour tout $k \geq 0$, on a $M^k = PD^kP^{-1}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
- (b) Calculer M^k pour tout $k \geq 0$.

Exercice 23 (♦) – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
2. Prouver que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies sont linéaires récurrentes d'ordre 2 et déterminer l'expression de leur terme général.
3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24 (♥) –

1. On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1+a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Soit u, v, w les suites définies par la donnée de $u_0 = 1, v_0 = 0, w_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n, \quad w_{n+1} = u_n + v_n + w_n.$$

Déterminer, à l'aide de la matrice A , l'expression des termes généraux de ces trois suites.

Exercice 25 (♣) – Pour tout a, b, c réels, montrer que le système

$$(S) : \begin{cases} x + 2y - z & = & a \\ -3x + y + 2z & = & b \\ 2x - y - z & = & c \end{cases}$$

possède une unique solution et l'exprimer en fonction de a, b, c .

Exercice 26 (♥) – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D . En déduire D^n .
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les neuf coefficients de la matrice A^n .
4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
 - (a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.
 - (b) En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0 .
 - (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 27 (♠) – On note J la matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Pour tout entier naturel non nul p , calculer J^p .
2. Soit $\mathcal{E} = \{I_n + \alpha J \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, $AB \in \mathcal{E}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $I_n + \alpha J$ admet-elle un inverse dans $\mathcal{E}$?
 - (b) En déduire l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- (c) A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout entier naturel n .

Exercice 28 (♥) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **commutant** de A et on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. **Propriétés générales.** Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que $I_n \in \mathcal{C}(A)$.
 - (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p \in \mathcal{C}(A)$.
 - (c) Soit $M, N \in \mathcal{C}(A)$ et λ un réel. Montrer que les matrices λM , $M + N$ et MN appartiennent au commutant de A .
 - (d) Soit $M \in \mathcal{C}(A)$. Montrer que si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.

2. **Un exemple.** Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Le but de cette question est de montrer que

$$\mathcal{C}(A) = \{\lambda I_2 + \mu A \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{E} = \{\lambda I_2 + \mu A \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

- (a) À l'aide des résultats de la question 1. et sans faire aucun calcul de produit matriciel, justifier que $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}(A)$.
- (b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer les produits AM et MA . En déduire que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\begin{cases} c = -4b \\ d = a + 4b \end{cases}$.
- (c) Montrer que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{E}$ et conclure.

Exercice 29 (♠) – On pose $\|A\| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $\|A\| \neq \|B\|$.

$$(a) \text{ Montrer que } A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-i-1}.$$

$$(b) \text{ En déduire que : } \frac{\|A^k - B^k\|}{\|A - B\|} \leq \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}.$$

Exercice 30 (♣) – Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 4x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

Exercice 31 (♣) – Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 32 (♣) – Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 33 (♣) – Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 34 (♥) – Résoudre les systèmes suivants où x, y, z sont des inconnues réelles.

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 3x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = -2 \\ x + 4y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 4y = 2 \\ -x - 2y = -2 \end{cases} \quad (S_6) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 35 (♠) – Déterminer, en fonction des paramètres réels a, b et c , le nombre de solutions des systèmes suivants où x, y, z sont des inconnues réelles :

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y - z = a \\ x - y + 2z = b \\ x - 4y + 5z = c \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = b \\ x - y + 3z = 2 \\ ax - y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 36 (♠) – Résoudre les systèmes suivants où m désigne un paramètre réel et x, y, z sont des inconnues réelles :

$$(S_1) \begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - mz = m - 1 \\ mx + y - mz = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + y = m + 2 \\ x + my = m^2 - m - 3 \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + my - mz = m \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!